Az $f(x)$-et előállító kifejezésnek azokra az x-ekre van értelme, amelyekre $\sqrt{a^2-x^2}$-nek van értelme, továbbá a nevező nem 0. Az első feltételt azok az x értékek elégítik ki, amelyekre

$$-|a| \leqq x \leqq |a|. \tag{2}$$

A nevező sohasem 0, ha a negatív, mert ekkor

$$a-\sqrt{a^2-x^2} \leqq a(<0),$$

tehát a kifejezésnek van értelme az egész (2) számközben. Ha a pozitív, akkor ki kell hagynunk (2)-ből az $x=0$ középpontot.

Függvényünk így értelmezve van az $x=0$ hely környezetében, beszélhetünk az illető helyen a határértékéről. Ennek megállapitási érdekében alakítsuk át a függvényt:

$$f(x)=\frac{x^2}{a-\sqrt{a^2-x^2}}\cdot\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{a+\sqrt{a^2-x^2}}=a+\sqrt{a^2-x^2}.$$

Ha x értéke közel van 0-hoz, $\left(a^2-x^2\right)$ értéke a^2-hez, $\sqrt{a^2-x^2}$ értéke $\sqrt{a^2}=|a|$-hez lesz közel, így azt várjuk, hogy

$$\lim_{x\to 0} f(x)=a+|a|=b. \tag{3}$$

Ezt akkor bizonyítjuk be, ha megmutatjuk, hogy tetszőleges pozitív ε-hoz van olyan δ, hogy a

$$0<|x|<\delta \tag{4}$$

egyenlőtlenségből következik, hogy

$$\left|f(x)-b\right|<\varepsilon. \tag{5}$$

Induljunk ki (5)-ből:

$$f(x)-b=\left(a+\sqrt{a^2-x^2}\,\right)-\left(a+|a|\right)=+\sqrt{a^2-x^2}-|a|.$$

Ezzel a különbséggel végezzük el az előbb használt átalakítás fordítottját:

$$f(x)-b=\left(\sqrt{a^2-x^2}-|a|\right)\cdot\frac{\sqrt{a^2-x^2}+|a|}{\sqrt{a^2-x^2}+|a|}=\frac{-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}+|a|},$$

emiatt

$$\left|f(x)-b\right|=\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}+|a|}.$$

Ennek kell ε-nál kisebbnek lennie, ami biztosan teljesül, ha

$$\frac{x^2}{|a|}<\varepsilon, \quad \text{azaz} \quad |x|<\sqrt{\varepsilon\cdot a}.$$

(4)-ből tehát valóban következik (5), ha δ-nak $\sqrt{\varepsilon\cdot a}$ és a kisebbikét, ill. ha egyenlők, közös értéküket választjuk.

Eredményünk így is kimondható

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\begin{cases}0, & \text{ha} \quad a<0,\\ 2a, & \text{ha} \quad a>0.\end{cases}$$

Megjegyzés. Esetünkben meghatározható lett volna δ legnagyobb megfelelő értéke, erre azonban nincs szükség. A fenti δ értékek lényegesen kevesebb fáradsággal adódtak.