Az első forduló feladataiból (folytatás):

3b. *Hogyan mérjük meg nagy belső ellenállású áramforrás elektromotoros erejét két ismeretlen belső ellenállású voltmérővel?*

Kisvölcsey Jenő, a budapesti piarista gimnázium IV. o. tanulójának megoldása:
Az elektromotoros erő E, az áramforrás belső ellenállása x, az első voltmérő belső ellenállása R_1, a másodiké R_2.
Végezzünk három mérést:
1. Mérjük meg az áramforrás kapocsfeszültségét az első voltmérővel. Ez legyen U_1. Az áramerősség

$$I_1 = \frac{E}{x + R_1}\,.$$

A voltmérőn U_1 feszültség esik:

$$U_1 = \frac{E \cdot R_1}{x + R_1}\,. \tag{1}$$

2. Ezt a mérést a másik voltmérővel is elvégezzük:

$$U_2 = \frac{E \cdot R_2}{x + R_2}\,. \tag{2}$$

3. Kapcsoljuk a két voltmérőt párhuzamosan. U_3 feszültséget mutatnak.
A három ellenállás eredője:

$$x + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}\,. \qquad \text{Az áramerősség:} \qquad I_3 = \frac{E}{x + \dfrac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}}\,.$$

Az első műszeren i_1 áram folyik. Ez úgy keletkezik, hogy a főágban folyó áram, (I_3) a mellékágakban levő ellenállásokkal fordított arányban oszlik:

$$i_1 = \frac{I_3 \cdot R_2}{R_1 + R_2}\,.$$

A mért feszültség:

$$U_3 = i_1 \cdot R_1 = \frac{I_3 \cdot R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{E\dfrac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}}{x + \dfrac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}} = \frac{E}{\dfrac{x}{R_1} + \dfrac{x}{R_2} + 1}$$

(1) és (2) összefüggésekből helyettesítéssel kapjuk:

$$U_3 = \frac{E}{\dfrac{E}{U_1} + \dfrac{E}{U_2} - 1}\,. \qquad \text{Ebből} \qquad E = \frac{1}{\dfrac{1}{U_1} + \dfrac{1}{U_2} - \dfrac{1}{U_3}}\,.$$

A második forduló feladataiból:

2. M tömegű mozdonyból és n darab m tömegű kocsiból álló szerelvény két kocsija, valamint az első kocsi és a mozdony között l hosszúságú vontatólánc van. Álló helyzetben két kocsi, valamint az első kocsi és a mozdony közötti távolság $l_0 < l$. A mozdony állandó P húzóerővel rendelkezik. Mekkora a vonat sebessége utolsó kocsi megindulásakor álló helyzetből való indítás esetén? Mekkora ekkor az összes mozgási energia? Mekkora az indítás hatásfoka? Mekkora energiát fogyasztott a láncok kifeszítése? (A súrlódás és a közegellenállás elhanyagolható.)

Halász Gábor, a budapesti II. Rákóczi Ferenc gimnázium IV. o. tanulójának megoldása:

Ha egy rendszerre állandó külső erő hat, a rendszer súlypontja az erő és a tömeg meghatározta gyorsulással halad függetlenül a belső erőktől. A szerelvény sebessége az utolsó kocsi megindulásakor megegyezik ugyanebben a pillanatban a súlypont sebességével. A kérdéses sebességet a súlypont gyorsulásából és a súlypontnak az utolsó kocsi megindulásáig megtett útjából számítjuk ki.

Legyen a két egymás után következő kocsi súlypontja közti távolság álló helyzetben l_0, az utolsó kocsi megindulásakor l. Álló helyzetben az n darab m tömegű kocsi tömegközéppontja S_0 a két szélső kocsi súlypontja közötti távolság felező pontjában van:

$$\begin{array}{lcr} \boxed{\mathrm{M}}\ m\ m\ m\ m\ m\ m\ m\ \ldots\ldots\ldots & & m \\ A & SS_0 & B \end{array}$$

$$S_0B = \frac{n-1}{2}l_0$$

Az egész rendszer súlypontja S

$$n \cdot m \cdot SS_0 = M \cdot (AS_0 - SS_0) = M \cdot \left(\frac{n+1}{2} l_0 - SS_0 \right),$$

ahonnan

$$SS_0 = \frac{M \cdot l_0 \cdot (n+1)}{2(n \cdot m + M)}$$

tehát

$$SB = SS_0 + S_0 B = \frac{l_0 \cdot n \cdot \left[2M + m \cdot (n-1) \right]}{2M \cdot (n+1)}.$$

Az utolsó kocsi megindulásakor a súlypontnak az utolsó kocsi súlypontjától való távolsága

$$\frac{l \cdot n \cdot \left[2M + m \cdot (n-1) \right]}{2M \cdot (n+1)}.$$

A súlypont elmozdulása

$$\frac{(l - l_0) n \cdot \left[2M + m \cdot (n-1) \right]}{2M \cdot (n+1)}.$$

A gyorsulás

$$a = \frac{P}{n \cdot m + M}$$

Tehát a végsebesség $v = \sqrt{2as}$ összefüggésből:

$$v = \frac{\sqrt{P \cdot (l - l_0) n \cdot \left[2M + m \cdot (n-1) \right]}}{n \cdot m + M}$$

A mozgási energia

$$E_m = \frac{P \cdot (l - l_0) n \cdot \left[2M + m \cdot (n-1) \right]}{2(n \cdot m + M)}$$

A befektetett munka

$$L = P \cdot n \cdot (l - l_0).$$

A hatásfok

$$\mu = \frac{2M + m(n-1)}{2(n \cdot m + M)}.$$

Ez mindig kisebb, mint 1, mert az egységet levonva belőle, negatív eredményt kapunk.

Az energia megmaradása elve alapján a láncok kifeszítésére fordított energia

$$L - E_m = \frac{P \cdot (l - l_0) n \cdot m \cdot (n+1)}{2(n \cdot m + M)}$$

3b. *Egy* 10 cm *és egy* 40 cm *gyújtótávolságú homorú gömbtükröt a közös fénytani tengelyen egymástól* 110 cm *távolságban egymás felé fordítva helyezünk el. Melyik az a két pont a két tükör között, amelynek a tükörben keletkezett összes képei ebben a két pontban vannak? Mekkorának kell lennie a két tükör egymástól való távolságának, hogy ez a két pont egybeessék?*

Tusnády Gábor a sátoraljaújhelyi Kossuth Lajos gimnázium IV. o. tanulójának megoldása:

Ha a pont I. tükörben (10 cm fókusztávolságú) alkotott valódi képe a II. tükör (40 cm fókusztávolságú) tárgyául szolgálva olyan képet ad, amely egybeesik az eredeti tárggyal, a pont helyzete megfelel a feltételnek. Legyen a tárgy az I. tükörtől t_1 cm-re, képe az I. tükörtől k_1 cm-re, akkor a feltétel szerint ugyanez a II. tükörtől t_2 cm-re és ennek a II. tükörben keletkezett képe (egybeesik az eredeti tárggyal) a II. tükörtől k_2 cm-re van, akkor fennáll a következő négyismeretlenes egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} t_1 + k_2 &= a \\ t_2 + k_1 &= a \\ \frac{1}{t_1} + \frac{1}{k_1} &= \frac{1}{f_1} \\ \frac{1}{t_2} + \frac{1}{k_2} &= \frac{1}{f_2}, \end{aligned}$$

ahol a a két tükör fénytani középpontjának távolsága, f_1 az I. és f_2 a II. tükör fókusztávolsága. Az egyenletrendszert átalakítva t_1-re másodfokú egyenletet kapunk:

$$t_1^2 \cdot (a - f_1 - f_2) - t_1 \cdot (a - 2f_2) \cdot a + (a - 2f_2) \cdot a \cdot f_1 = 0$$

$a = 110$ cm, $f_1 = 10$ cm, $f_2 = 40$ cm értékeket helyettesítve: $t_1 = 13{,}14$ cm, $41{,}86$ cm.

A feladat második kérdésére a megoldást **Papp Éva,** a budapesti Ságvári Endre gimnázium IV. o. tanulójának dolgozatából közöljük: A két pont a két tükörnek azon távolságánál esik egybe, amelyre az előbbi másodfokú egyenlet diszkriminánsa 0:

$$a^2 \cdot (a - 2f_2)^2 - 4(a - f_1 - f_2) \cdot (a - 2f_2) \cdot a \cdot f_1 = 0$$

$f_1 = 1$ dm és $f_2 = 4$ dm értékeket helyettesítve:

$$a^2 \cdot (a - 8)^2 - 4(a - 5)(a - 8) \cdot a = 0.$$

Ennek megoldásai: $a = 0$

$$a - 8 = 0, \quad \text{ebből} \quad a = 8 \text{ dm},$$
$$a^2 - 12a + 20 = 0, \quad \text{ebből} \quad a = \begin{cases} 10 \text{ dm} \\ 2 \text{ dm} \end{cases}$$

A három utolsó a reális megoldás. Ha a két tükör közti távolság 10 dm, akkor a két tükör kétszeres gyújtópontja egybeesik, és a tárgy a kétszeres gyújtópontban van.

Ha a két tükör távolsága 2 dm vagy 8 dm, akkor a tárgy az első, illetve a II. tükör kétszeres gyújtótávolságában van, és ugyanott van a másik tükör fénytani középpontja.