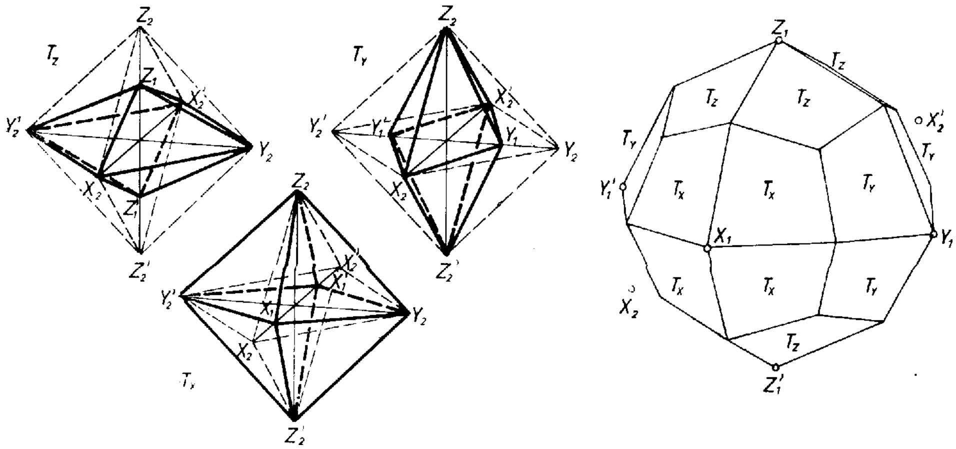
A jelölést úgy választjuk, hogy a vesszőtlen pontok mindegyik egyenesnek az O-ból induló egyik félegyenesén legyenek, a vesszősek a másikon.

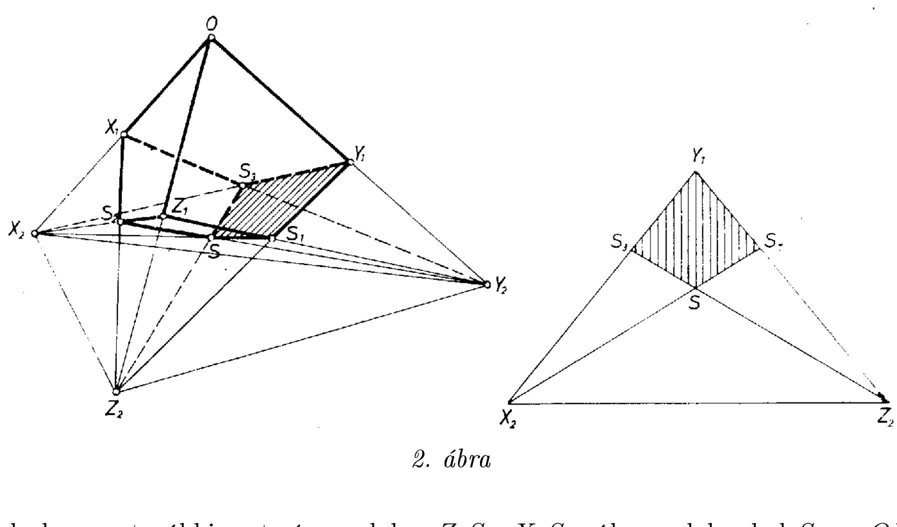
Az a 8 sík, amelyet a három egyenes egy-egy 2-es indexű pontja határoz meg, egy T_2 szabályos oktaédert határol, ennek térfogata $32/3$. Ennek síkjaiban Z_2 helyett Z_1-et, Z_2' helyett Z_1'-t véve a 8 sík egy olyan T_2 testet határol, mely T_2-ből a z-tengely mentén való felére zsugorítással is származtatható, térfogata tehát $16/3$. A hasonlóan az x, ill. y tengely menti zsugorítással előálló T_x, T_y test, valamint T_z lapjai határolják a vizsgálandó T testet, szám szerint 24 lap (1. ábra).



1. ábra

T_x, T_y és T_z mindegyike szimmetrikus a három tengely által páronként meghatározott síkokra, ezért ugyanez áll közös részükre, T-re is. Elegendő tehát T-nek a 3 sík által elhatárolt 8 térrész egyikébe eső részét vizsgálni. Legyen ez az $OX_2Y_2Z_2$ tetraéderbe eső rész.

Az $X_2Y_2Z_1$ sík az $OX_2Y_2Z_2$ tetraédert két egyenlő térfogatú részre vágja szét (hiszen a részek O, Z_2 nem közös csúcsai a metsző síktól egyenlő távolságra vannak), az OZ_2Y_2, OZ_2X_2 oldallapokat pedig azok Y_2Z_1, ill. X_2Z_1 súlyvonalában metszi. Az $X_2Y_2Z_1$, és $Y_2Z_2X_1$ síkoknak Y_2 közös pontjuk, továbbá az OX_2Z_2 lapot annak X_2Z_1, illetve X_1Z_2 súlyvonalában metszik, tehát e lap S_2 súlypontja is rajta van mindkét síkon. Az $X_2Y_2Z_1$, $Y_2Z_2X_1$ síkok metszésvonala tehát az $OX_2Y_2Z_2$ tetraéder Y_2S_2 súlyvonala (2. ábra).



2. ábra

Hasonlóan kapjuk, hogy a további metszésvonalak a Z_2S_3, X_2S_1 súlyvonalak, ahol S_3 az OX_2Y_2 lap súlypontja, S_1 pedig az OY_2Z_2 lapé, és így az $X_2Y_2Z_1$, $Y_2Z_2X_1$, $Z_2X_2Y_1$ síkok metszéspontja az $OX_2Y_2Z_2$ tetraéder S súlypontja. T-nek e tetraéderbe eső része tehát az O csúcsú, és

$$S_1SS_2Z_1, \qquad S_2SS_3X_1, \qquad S_3SS_1Y_1$$

alapú gúlák egyesítéséből áll. Mivel az $X_2Z_2Y_1$ háromszög területének az $S_3SS_1Y_1$ négyszög területe az $1/6$-a (mert az Y_1SS_3 háromszög területe fele X_2SS_3 területének, ez viszont $1/4$-e $X_2Z_2S_3$ területének, ami pedig $X_2Z_2Y_1$ területének $2/3$-a), az $OS_3SS_1Y_1$ gúla térfogata az $OX_2Z_2Y_1$ tetraéder térfogatának $1/6$-a, vagyis az $OX_2Y_2Z_2$ tetraéder térfogatának $1/12$-e. A fenti három gúla együttes térfogata tehát $OX_2Y_2Z_2$ térfogatának $1/4$-e, így pedig T térfogata is negyede T_2 térfogatának:

$$V_T = \frac{1}{4}\,V_2 = \frac{1}{4}\cdot\frac{32}{3} = \frac{8}{3} \qquad \text{térfogategység.}$$

Fazekas Béla (Pannonhalma, Benedekrendi Gimn., IV. o. t.)
Eller József (Mohács, Kisfaludy K. Gimn., IV. o. t.)

Megjegyzés. A vizsgált test a szabályos (köbös) kristályrendszer deltoidikozitetraéder (deltoidhuszonnégyes) nevű alakja. Általános jelölése h, k, k, ahol h és k $(h < k)$ a síkjai által a tengelyekből lemetszett, egymástól különböző szakaszok, esetünkben 1, 2, 2.