Legyen az állandó értéke c^2, ahol c adott szakasz, az adott kör k, továbbá B, C és az F felezőpont vetülete k-nak AD átmérőjére B', C', F'. Mivel BAD és CAD derékszögű háromszög, azért

$$AB^2 = AD \cdot AB' = 2r \cdot AB', \qquad AC^2 = 2r \cdot AC', \tag{1}$$

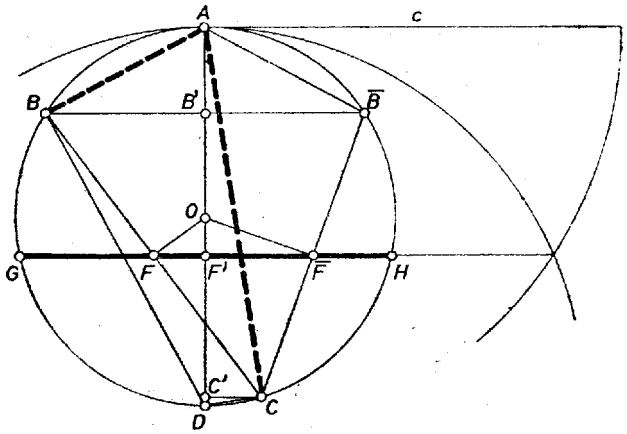
és így a feltevés folytán

$$AB^2 + AC^2 = 2r(AB' + AC') = 4r \cdot AF' = c^2. \tag{2}$$

Felhasználtuk, hogy az egyenlő BF és FC szakaszok merőleges vetülete AD-n is egyenlő: $B'F' = F'C'$, és így ($BA \leqq CA$ megállapodással)

$$AB' + AC' = AB' + (AB' + B'C') = 2AB' + 2B'F' = 2AF'.$$

(2) szerint az AF' szakasz és vele az F' vetület helyzete állandó, ezért F csak az F'-ben AD-re állított merőleges egyenesen lehet. F'-t (2) alapján megadja a D körüli, A-n átmenő kör és az A körüli, c sugarú kör közös húregyenesének AD-vel való metszéspontja.



Másrészt F, és vele F' is a k belsejében van, így a mondott merőlegesnek csak a k-ba eső GH húrja tartozhat hozzá a mértani helyhez (végpontjai nélkül, hiszen F csak úgy lehetne a k-n, ha B és C egybeesnék, ekkor viszont nem beszélhetünk BC húrról). A GH húr bármely F^* belső pontjához valóban tartozik (legalább) egy, általa felezett B^*C^* húr, amelyre $AB^{*2} + AC^{*2} = c^2$, ezt az OF^*-ra F^*-ban állított merőleges metszi ki k-ból. Ugyanis ekkor mindenesetre $B^*F^* = F^*C^*$, ezért $B^{*\prime}F' = F'C^{*\prime}$, tehát az (1) és (2) átalakítás, valamint F' mondott szerkesztése szerint $AB^{*2} + AC^{*2} = c^2$.

Eszerint F valóban a GH húr belső pontjait írja le.

F' és a GH húr létrejöttének feltétele $AF' < 2r$ alapján $0 < c^2 < 8r^2$, $c < 2\sqrt{2r}$.

Amennyiben F'-ként k-nak O középpontja adódik, magához az O ponthoz k bármely átmérőjének végpontjai megfelelő B, C pontpárt adnak.

Lázár András (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn.)

Megjegyzés. Kézenfekvő a feladatot koordinátákkal oldani meg, ez a megoldás azonban nem különbözik lényegesen a fentitől, csak kissé gépiesebben vezet a talált eredményre. Ezért nem részletezzük.