I. megoldás. A függvénynek csak ott *lehet* szélső értéke, ahol deriváltja eltűnik:

$$f'(x) = 3x^2 + p = 0, \qquad x^2 = -\frac{p}{3},$$

vagyis az

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{p}{3}}$$

helyeken. Ezek akkor és csak akkor valósak és különbözők, ha

$$p < 0 \tag{1}$$

($p = 0$ esetén $x_1 = x_2$, tehát a szélső értékek eleve nem lehetnek különböző előjelűek).

E feltétel teljesülése esetén az

$$x_1 = -\sqrt{-\frac{p}{3}} \qquad \text{és} \qquad x_2 = \sqrt{-\frac{p}{3}}$$

helyek mindegyikén *van is* szélső érték, mert $f'(x)$ előjelet vált, x_1-en (ami < 0) áthaladva pozitívból negatívvá válik, hiszen itt $3x^2$ csökken, x_2-n áthaladva pedig negatívból pozitívvá, így az $f(x)$ függvénynek x_1-ben (helyi) maximuma és x_2-ben (helyi) minimuma van.

A szélső értékek:

$$f(x_1) = x_1(x_1^2 + p) + q = -\sqrt{-\frac{p}{3}}\left(-\frac{p}{3} + p\right) + q = q - \frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}},$$

$$f(x_2) = x_2(x_2^2 + p) + q = \sqrt{-\frac{p}{3}}\left(-\frac{p}{3} + p\right) + q = q - \frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}$$

és ezek akkor és csak akkor ellentett előjelűek, ha szorzatuk negatív:

$$f(x_1) \cdot f(x_2) = q^2 - \frac{4p^2}{9}\left(-\frac{p}{3}\right) = q^2 + \frac{4p^3}{27} = 4\left[\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3\right] < 0. \tag{2}$$

Ez a feltétel magában foglalja (1)-et is, hiszen $p \geqq 0$ esetén a bal oldal

$$q^2 + \frac{4p^3}{27} \geqq q^2 \geqq 0,$$

így $f(x)$ szélső értékei akkor és csak akkor ellentett előjelűek, ha a p, q együtthatókra teljesül a (2) feltétel.

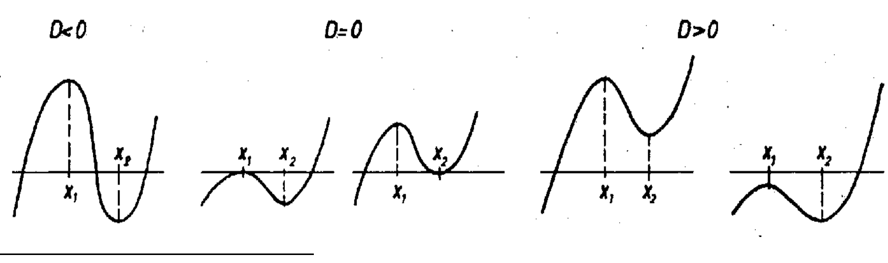
Gegesy Ferenc (Budapest, Móricz Zs. Gimn., IV. o. t.)

Megjegyzés. Akik ismerik az $f(x) = 0$ redukált harmadfokú egyenlet megoldóképletét[1], azok (2) szögletes zárójelében felismerik az egyenlet D diszkriminánsát. Ezt a megoldás diszkussziójával egybevetve látjuk, hogy $f(x)$ szélső értékei ellentett előjelű voltának feltétele azonos azzal, hogy az $f(x) = 0$ egyenletnek három különböző valós gyöke legyen. Valóban, a fentebbiek szerint az $x_1 < x < x_2$ értékekre $f'(x) < 0$, az $f(x)$-et ábrázoló görbe süllyed, $f(x_1) > f(x_2)$, így $f(x_1)$ és $f(x_2)$ ellentétes jelű volta azt jelenti, hogy $f(x_1) > 0$ és $f(x_2) < 0$, a görbének a maximum előtti, emelkedő szakasza, továbbá az x_1 és x_2 közti, süllyedő szakasza, végül a minimum utáni, emelkedő szakasza külön-külön metszik az x tengelyt, innen a 3 különböző valós gyök.

A feltételek megfeleltetését folytatva

$$D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0, \qquad \text{ill.} \qquad D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 > 0$$

azt jelenti, hogy a szélső értékek egyike 0, a görbe itt érinti az x tengelyt, kétszeres gyök van, ill. hogy a két szélső érték egyenlő előjelű (vagy mindkettő pozitív, vagy mindkettő negatív). Az ábra a görbe menetét vázolja $x_1 \neq x_2$ esetére, D előjele szerint.



[1]Kissé más alakban lásd *Hack Frigyes:* Függvénytáblázatok, matematikai összefüggések, Tankönyvkiadó, Budapest, 1967, 61–62. o.

II. megoldás. Az $f(x)$ függvény képét az

$$f_0(x) = x^3 + px$$

függvény képéből q-val való eltolással kapjuk az y tengely irányában, emiatt először az egyszerűbb $f_0(x)$ függvényt vizsgáljuk. Mivel $f_0(-x) = -f_0(x)$, azaz a függvény ún. páratlan függvény, elegendő pozitív x-ekre vizsgálnunk. Három esetet különböztetünk meg:

1. Ha $p > 0$, akkor f_0 két monoton növekvő függvény összege, tehát f_0 is monoton nő, így nincsenek szélső értékei.
2. Ha $p = 0$, akkor $f_0 = x^3$, ismét monoton növekvő.
3. Ha $p < 0$, mondjuk $p = -a^2$ (ahol $a > 0$), akkor

$$f_0(x) = x(x+a)(x-a), \tag{3}$$

így f_0 a $0 < x < a$ intervallumon negatív, $x > a$ mellett pozitív. $x > a$ mellett mindhárom tényező pozitív és monoton nő, így f_0 is nő, ezért szélső érték csak a $0 < x < a$ szakaszon lehet. Ezt a számtani és mértani közép ismert nagyságviszonya alapján akarjuk meghatározni. Alakítsuk (3)-at így:

$$-\alpha\beta f_0(x) = x(\alpha x + \alpha a)(\beta a - \beta x),$$

ahol α-t és β-t úgy akarjuk meghatározni, hogy a három tényező összege állandó legyen. Ekkor ugyanis a szorzat akkor maximális, ha tényezői egyenlőek. Ha az összegben x együtthatója eltűnik:

$$1 + \alpha - \beta = 0,$$

akkor az összeg állandó, és a tényezők egyenlőek, ha még

$$x = \alpha x + \alpha a$$
$$x = \beta a - \beta x$$

is teljesül. Ennek az egyenletrendszernek egy megoldása pl.

$$\alpha = \frac{\sqrt{3}-1}{2} (> 0), \qquad \beta = \frac{\sqrt{3}+1}{2} (> 0), \qquad x = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

(és teljesül $0 < x < a$), tehát $f_0(x)$-nek $x = a/\sqrt{3}$ mellett van minimuma, és itt a függvény értéke

$$\min f_0 = f_0\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right) = \frac{a}{\sqrt{3}}\left(\frac{a^2}{3} - a^2\right) = -\frac{2}{3\sqrt{3}}a^3 = -\frac{2}{3\sqrt{3}}(-p)^{3/2}.$$

Mivel f_0 páratlan, ebből a függvény lokális maximuma is előállítható:

$$\max f_0 = \frac{2}{3\sqrt{3}}(-p)^{3/2}.$$

Visszatérve az $f(x)$ függvényre, ennek is csak negatív p mellett lesz szélső értéke, és ezek akkor lesznek különböző előjelűek, ha q értéke $\max f_0$ és $\min f_0$ közé esik, azaz

$$|q| < \max f_0 = \frac{2}{3\sqrt{3}}(-p)^{3/2}, \qquad q^2 < -\frac{4}{27}p^3, \qquad \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 < 0,$$

ami természetesen csak negatív p-re teljesülhet, ez tehát a szükséges és elegendő feltétele annak, hogy az $f(x)$ függvény szélső értékei különböző előjelűek legyenek.