Legyenek a P_1 pont koordinátái (x_1, y_1). Mivel P_1 a parabolán van, $y_1 = x_1^2 + 1$. A P_1 ponton átmenő érintő m meredeksége az

$$f(x) = x^2 + 1$$

függvény x_1-beli differenciálhanyadosával egyenlő:

$$m = f'(x_1) = 2x_1.$$

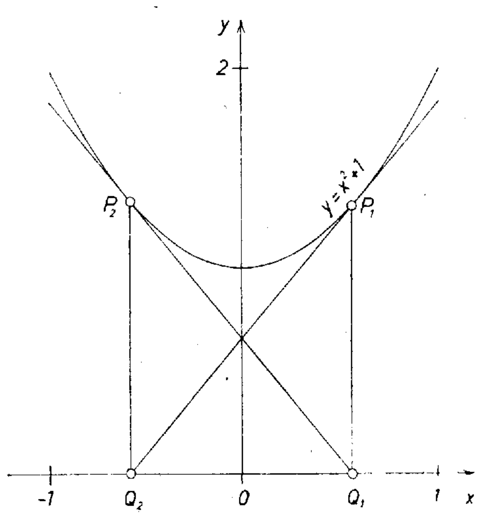
Az érintő egyenlete eszerint

$$y = 2x_1(x - x_1) + y_1.$$

Ez az egyenes az x tengelyt az

$$x = \frac{2x_1^2 - y_1}{2x_1} = \frac{x_1^2 - 1}{2x_1}$$

abszcisszájú pontban metszi.



Feladatunk szerint ez a metszéspont azonos a parabola $P_2(x_2, y_2)$ pontjának az x tengelyen levő $Q_2(x_2, 0)$ vetületével, ezért

$$x_2 = \frac{x_1^2 - 1}{2x_1}, \text{ azaz}$$

(1)
$$2x_1x_2 = x_1^2 - 1.$$

A P_1, P_2 pontok szerepének felcserélésével kapjuk annak feltételét, hogy a P_2 beli érintő átmenjen a $Q_1(x_1, 0)$ ponton:

(2)
$$2x_2x_1 = x_2^2 - 1.$$

A bal oldalak egyenlők, tehát a jobb oldalak is. Ebből $x_1^2 = x_2^2$. Nyilván nem lehet azonban $x_1 = x_2$, azaz P_1 és P_2 azonos, tehát $x_2 = -x_1$, amit (1)-be helyettesítve kapjuk, hogy

$$-2x_1^2 = x_1^2 - 1,$$

azaz $x_1 = \pm 1/\sqrt{3}$. Ezek szerint a függvénygörbe

$$P_1\left(\pm 1/\sqrt{3},\ 4/3\right) \text{ és } P_2\left(\mp 1/\sqrt{3},\ 4/3\right)$$

pontjai felelnek meg a követelménynek. A két lehetséges előjel-választás tehát csak a pontok szerepének felcserélését jelenti, így lényegében egyetlen megoldása van a feladatunknak.

Hetzer Jenő (Sopron, Széchenyi I. Gim., III. o. t.)