a) A függvény első tagja az x szám egész része, a gyökjel alatt pedig az ún. tört része áll, amire $[x] \leqq x < [x]+1$ miatt teljesül:

$$0 \leqq x - [x] < 1. \tag{1}$$

Eszerint a második tagnak mindig van értelme.

A függvényt $f(x)$-szel jelölve azt kell belátnunk, hogy véve az x_1, x_2 helyeket, ahol $x_1 < x_2$, fennáll $f(x_1) < f(x_2)$, azaz $f(x_2) - f(x_1) > 0$.

Ha $[x_1] = [x_2]$, akkor $f(x_1)$ és $f(x_2)$ csak a gyökjel alatti számban különböznek, és azokra

$$x_1 - [x_1] < x_2 - [x_1] = x_2 - [x_2],$$

így, mivel két nem-negatív szám közül a nagyobbiknak nagyobb a négyzetgyöke, valóban $f(x_1) < f(x_2)$.

Ha pedig $[x_2] > [x_1]$, akkor $[x_2] \geqq [x_1]+1$, és mivel a négyzetgyökök mindegyike 0 és 1 közötti szám, az 1 értéket már nem engedve meg, ezért különbségüket csökkentjük, ha a kisebbítendő második tagja helyett 0-t írunk, a kivonandóé helyett pedig 1-et. Így

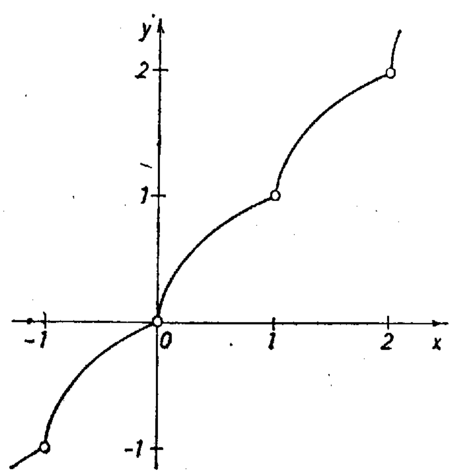
$$f(x_2) - f(x_1) > [x_2] - \big([x_1]+1\big) \geqq 0,$$

tehát$f(x_2) - f(x_1) > 0$.

b) A $(0,1)$ balról zárt intervallumon $f(x) = \sqrt{x}$ vagyis képe p parabolaív. n-nel egész számot jelölve, az $(n, n+1)$ balról zárt intervallumban, ahol tehát $[x] = n$,

$$f(x) - n = \sqrt{x-n},$$

vagyis a függvény képe p-ből eltolással keletkezik, mindkét tengely irányában n egységgel. (Könnyű belátni továbbá, hogy a szomszédos ívek egymáshoz kapcsolódnak.)



Balogh Zoltán (Debrecen, Fazekas M. Gimn., I. o. t.)