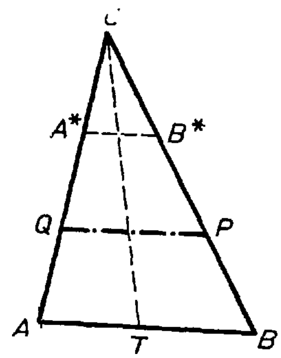
1. feladat. *Adott egy ABC háromszög. Szerkesszük meg a háromszög BC oldalán azt a pontot, melyen át AB-vel párhuzamos egyenest húzva a keletkezett trapéz és kis háromszög kerülete egyenlő!*

I. megoldás: Gondoljuk a feladatot megoldottnak és legyen a keresett, AB-vel párhuzamos egyenesnek BC-vel, ill. AC-vel alkotott metszéspontja P, ill. Q. A PQ szakasz a kis háromszög és a trapéz kerületének egyaránt része, ezért a kerületek egyenlőségére vonatkozó követelmény így is írható:

(1) $$PC + CQ = PB + BA + AQ,$$

és így $PC + CQ$ egyenlő az ABC háromszög kerületének felével.



Másrészt mivel QP párhuzamos AB-vel, azért a CPQ és CBA háromszögek hasonlók, és így

(2) $$PC : CQ = BC : CA.$$

Ezek alapján először $k/2 = (AB + BC + CA)/2$ hosszúságú egyenesszakaszt szerkesztünk, majd ezt $BC : CA$ arányban kettéosztjuk, és így nyerjük a keresett PC, ill. CQ szakaszt.

Szerkesztésünk helyessége nyilvánvaló; P mindig a BC szakaszon adódik, mert $PC + CQ = k/2$ a háromszög-egyenlőtlenség folytán kisebb $BC + CA$-nál.

II. megoldás: Tükrözzük A-t a Q, B-t a P pontra nézve, így nyerjük az A^*, B^* pontokat. (1)-ből az így létrejött további egyenlő darabokat elhagyva

$$B^*C + CA^* = BA.$$

Másrészt nyilvánvaló, hogy A^*B^* párhuzamos AB-vel, amiből következik, hogy

$$B^*C : CA^* = BC : CA.$$

Eszerint az AB oldalt a BC és CA oldalak arányában osztva nyerjük a B^*C és CA^* szakaszokat, a keresett P, Q pont pedig a BB^*, AA^* szakasz felezőpontja.

Megjegyzések: 1. Itt az I. megoldáshoz képest azt nyertük, hogy a felosztandó szakaszt nem kell szerkesztenünk. A felosztás igen egyszerűen adódik az ACB szög CT felezőjével.

2. A feladat általánosítható: előírhatjuk, hogy a kis háromszög és a trapéz kerületei egyenlőség helyett adott λ ($\lambda \neq 1, \lambda > 0$) arányban álljanak:

(3) $$PC + CQ + QP = \lambda(PB + BA + AQ + QP),$$

(ahol λ-t úgy tekintjük adottnak, hogy ismerjük az egységnyi hosszúságú és a λ hosszúságú szakaszt). Előírhatjuk azt is, hogy az (1) két oldalán álló összegek aránya legyen egy adott μ érték:

(4) $$PC + CQ = \mu(PB + BA + AQ).$$

Ezekkel a feladat így hangzik: Adott az ABC háromszög. Szerkesszük meg a BC oldalon a P, és az AC oldalon a Q pontot úgy, hogy PQ párhuzamos legyen BA-val és teljesüljön (3), ill. (4).

Tekintsük előbb a (4) követelmény esetét. Adjunk (4) mindkét oldalához $\mu(PC + CQ)$-t, így

$$(1 + \mu)(PC + CQ) = \mu(BC + BA + AC),$$

másképpen

(4') $$(PC + CQ) : (BC + BA + AC) = \mu : (1 + \mu).$$

Ennek alapján első lépésül a háromszög kerületéhez és a μ, $1+\mu$ szakaszhoz negyedik arányosként megszerkesztjük $PC+CQ$-t, majd ezt (2)-nek megfelelően két részre osztjuk.

Megoldás létezésének feltétele, hogy $PC+CQ$ kisebbnek adódjék $BC+CA$-nál. Ezt (4') csekély átalakításával úgy is mondhatjuk, hogy a $\mu:1$ arány értéke kisebb legyen $(BC+CA):AB$-nél; egyenlőség esetén a P pont B-be, Q pedig A-ba esik, a trapéz elfajul egyenesszakasszá.

A (3) követelmény esetében a $PC=a'$, $QC=b'$, $QP=c'$, $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$ egyszerűbb jelölésekkel a fentemlített hasonlóság alapján $b'=ba'/a$ és $c'=ca'/a$. Ezek alapján (3) így alakítható:

$$a':a=k:\left(\frac{1+\lambda}{\lambda}k-2c\right),$$

amiből a' az előbbi esethez hasonlóan megszerkeszthető.

A megoldhatóság feltétele, hogy a' kisebbnek adódjék a-nál, másképpen, hogy – a legutóbbi aránypárból – a $\lambda:1$ arány értéke kisebb legyen $k:2c$-nél.

Egybetűs jelölésekkel a (4) követelmény hasonlóan így alakítható:

$$a':a=k:\frac{1+\mu}{\mu}(k-c).$$

2. feladat. *Bizonyítsuk be, hogy bármely hegyesszögű háromszögnek van két olyan szöge, amelyek különbsége kisebb 30°-nál!*

I. megoldás: Az állítás egyenlő szárú háromszögre nyilván igaz, hiszen a két egyenlő szög különbsége 0°. Ezért feltehetjük, hogy a szokásos jelölésekkel

(1) $$\alpha>\beta>\gamma,$$

és a feladat megszorításánál fogva

(2) $$\alpha<90^\circ.$$

Az állítást indirekt úton bizonyítjuk. Feltesszük, hogy van olyan háromszög, amelyben

(3) $$\alpha-\beta\geq 30^\circ,$$

és

(4) $$\beta-\gamma\geq 30^\circ,$$

és megmutatjuk, hogy ilyen háromszög nem lehet hegyesszögű. Valóban, (3) kétszeresét és (4)-et hozzáadva a szögekre érvényes

(5) $$\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$$

egyenlőséghez, azt kapjuk, hogy

$$3\alpha\geq 270^\circ,\quad \text{azaz}\quad \alpha\geq 90^\circ.$$

Eszerint hegyesszögű háromszögre (3) és (4) egyidejűen nem teljesülhet, ezért legalább az egyik szögkülönbség kisebb 30°-nál. Ezt kellett bizonyítanunk.

Megjegyzések: 1. Meggondolásunkat egyenlőtlenségekkel való műveletek nélkül is elmondhatjuk. Feltesszük, hogy van olyan pozitív δ és ε szög, hogy

(3') $$\beta=\alpha-(30^\circ+\delta)$$

és

(4') $$\gamma=\beta-(30^\circ+\varepsilon).$$

Előbb (4')-t, majd (3')-t (5)-be helyettesítve átalakítással az

$$\alpha=90^\circ+\frac{2\delta+\varepsilon}{3}$$

összefüggésre jutunk, ami ellentmond (2)-nek.

2. Több efféle úton járó versenyző szükségtelenül feltette, hogy $\delta=\varepsilon$, vagyis hogy $\alpha-\beta=\beta-\gamma$. Az ilyen megoldások nem teljesek, hiszen csak egy további speciális feltételnek eleget tevő háromszögekkel foglalkoznak; még jobban látszik ez abból, hogy minden ilyen háromszögben $\beta=60^\circ$.

3. Többen ilyenféleképpen kezdték okoskodásukat: „legyen α csak egy kevéssel kisebb $90°$-nál, pl. $89°59'$". Az ilyen feltevés – még ha azt helyes okoskodás követi is – eleve lemond a bizonyítás teljességéről, hiszen figyelmen kívül hagyja mindazokat a hegyesszögű háromszögeket, melyek legnagyobb szöge $90°$ és $89°59'$ közé esik. Az idézett feltevés abból a hibás szemléletből ered, mintha létezne a $90°$-nál kisebb szögek között egy legnagyobb szög. Ilyen azonban nincs.

II. megoldás: Vizsgáljuk a háromszögnek nagyságra nézve középső szögét, azaz (1) szerint β-t. Ha ez legalább $60°$, akkor $\alpha - \beta < 30°$; ha viszont $\beta < 60°$, akkor $\alpha + \beta < 150°$, és így $\gamma = 180° - (\alpha + \beta) > 30°$, tehát $\beta - \gamma < 30°$. A feladat állítása tehát mindkét esetben teljesül.

3. feladat. *Bizonyítsuk be, hogy bármely öt egymás után következő egész szám négyzetének összege osztható 5-tel, de 25-tel nem osztható!*

Megoldás: A szimmetria érdekében jelöljük az öt egymás után következő egész szám közül a középsőt a-val, ekkor a feladat annak igazolása, hogy az

$$S = (a-2)^2 + (a-1)^2 + a^2 + (a+1)^2 + (a+2)^2 = 5(a^2+2)$$

szám osztható 5-tel, de 25-tel nem osztható.

a és azért a^2+2 is egész és S első tényezője 5, ezért S osztható 5-tel. S akkor és csak akkor lenne 25-tel is osztható, ha a második tényezője, a^2+2 is osztható volna 5-tel. Evégett a^2+2-nek vagy 0-ra, vagy 5-re kellene végződnie, tehát a^2 végződése 8, vagy 3 lenne. Négyzetszám azonban sem 8-ra, sem 3-ra nem végződhet, ezért a^2+2 sem végződhet 0, vagy 5-re, tehát 5-tel nem lehet osztható a semmilyen egész értéke mellett sem, és így S nem osztható 25-tel.

Megjegyzés: Elkerülhetjük a négyzetszámok lehetséges végződéseire történő hivatkozást, ha megvizsgáljuk az a^2+2 kifejezés 5-tel való oszthatóságát minden 5-tel való oszthatóság szempontjából különböző a mellett. Ezek a következők:

$a = 5b$ (ahol b egész szám), ekkor $a^2 + 2 = 25b^2 + 2$, és ez 5-tel osztva 2-t ad maradékul;

$a = 5b \pm 1$ esetén $a^2 + 2 = 25b^2 \pm 10b + 3$, ez 5-tel osztva 3-at ad maradékul;

$a = 5b \pm 2$ esetén $a^2 + 2 = 25b^2 \pm 20b + 6$, ez 5-tel osztva 1-et ad maradékul.

Végigvizsgáltunk minden lehetséges esetet, és azt találtuk, hogy $a^2 + 2$ egyik esetben sem osztható 5-tel.