1. feladat. *Bizonyítsuk be, hogy ha két egész szám különbsége 2, akkor a két szám köbének különbsége három négyzetszám összegére bontható.*

I. megoldás: Próbálgatással könnyen kapjuk a következő felbontásokat:

$$\begin{aligned}
3^3-1^3=26\ &=1^2+3^2+4^2=0^2+1^2+5^2,\\
4^3-2^3=56\ &=2^2+4^2+6^2,\\
5^3-3^3=98\ &=3^2+5^2+8^2=1^2+4^2+9^2=0^2+7^2+7^2,\\
6^3-4^3=152&=4^2+6^2+10^2=2^2+2^2+12^2,\\
2^3-0^3=8\ &=0^2+2^2+2^2,\\
1^3-(-1)^3=2\ &=(-1)^2+1^2+0^2,\\
(-2)^3-(-4)^3=56&=(-4)^2+(-2)^2+(-6)^2.
\end{aligned}$$

Észrevesszük, hogy mindegyik különbség elsőnek írt felbontásában az első két négyzetszám alapja az a két szám, amelyek köbeinek különbségét éppen vizsgáljuk, a harmadik négyzetszám alapja pedig az előbbi kettőnek az összege. Ezek alapján azt sejtjük, hogy a vizsgálandó számokat n és $n+2$-vel jelölve bármely n mellett fennáll

$$(n+2)^3-n^3=n^2+(n+2)^2+(2n+2)^2. \tag{1}$$

Sejtésünk bizonyítására a két oldali hatványokat kifejtve mindkét oldalon $6n^2+12n+8$-at kapunk, tehát (1) helyes. Ha n és vele $n+2$ egész szám, akkor összegük is az, tehát a jobb oldal mindhárom tagja négyzetszám. Evvel az állítást igazoltuk.

Megjegyzések: 1. Kevesebb konkrét próbálgatást végzünk a következő meggondolásban, és nem lesz szükség bizonyításra. Nyilvánvaló, hogy a köbök

$$(n+2)^3-n^3=6n^2+12n+8 \tag{2}$$

különbségében n-et változtatva a négyzetszámok alapjai is változnak, függnek n-től. Tegyük fel, hogy van olyan felbontás, melyben az alapok n-nek elsőfokú függvényei, vagyis ilyen alakúak:

$$an+b,\qquad cn+d,\qquad en+f, \tag{3}$$

ahol a, b, c, d, e, f egész számok. Ezek négyzetösszege átrendezéssel

$$(a^2+c^2+e^2)n^2+2(ab+cd+ef)n+(b^2+d^2+f^2). \tag{4}$$

Ha találunk olyan $a,b,\ldots,f$ egész számokat, amelyekkel (4) egymás utáni együtthatói egyenlők a (2) jobb oldalán álló együtthatókkal:

$$a^2+c^2+e^2=6, \tag{5}$$

$$2(ab+cd+ef)=12, \tag{6}$$

$$b^2+d^2+f^2=8, \tag{7}$$

evvel igazoltuk az állítást, és a talált $a,b,\ldots,f$ számokkal képezett (3) kifejezések minden n-re adnak egy alapszámhármast a kívánt négyzetösszegfelbontáshoz.

(5) és (7) szerint az $a,b,\ldots,f$ együtthatók négyzetei számára csak a 6-on, 8-on aluli négyzetszámok jönnek szóba: 0, 1 és 4. Ezek közül vett három tagból a 6-os, 8-as összeg $1+1+4$, ill. $0+4+4$ alakban kiadódik. Ennek alapján vehetjük egyrészt, hogy $a=c=1$, $e=2$, másrészt hogy, b, d, f értékei valamely sorrendben a 0, 2, 2 számok, és e sorrendet cserélgetve megvizsgálhatjuk, hogy teljesül-e (6). Mindjárt a $b=0$, $d=f=2$ értékrendszerrel való próba eredményes, ezekkel a (3) kifejezések az (1) jobb oldalán álló alapokat adják.

2. Az (1) jobb oldalán álló alapszámok bármelyike helyett (-1)-szeresét véve – vagyis pl. c és d előjelének egyidejű cseréjével – csupán látszólag kapnánk újabb felbontást, hiszen így maguk a négyzetszámok ugyanazok maradnak. (Ilyenkor (5) és (7)-ben a négyzetek, és (6)-ban a szorzatok értéke változatlan.) Felvetődik azonban a kérdés: található-e a (3) együtthatói számára adódott számok sorrendjének, valamint pl. c és d egyikének előjelét megváltoztatva – vagy másképpen – az (1)-től lényegesen különböző felbontás?

Nyilván sem (5)-ben, sem (7)-ben nem lehetséges más megfelelő előállítás. Továbbá, hogy az eddigi $b=0$, $d=2$ értékeket felcserélve sem kapunk új felbontást, $f=0$, $b=2$-vel pedig a (6) bal oldalán álló $ab+cd+ef$ kifejezés értéke kisebbnek adódik. Mindig az eddigi 6-nál kisebbnek adódik ez a kifejezés, vagy változatlan marad, ha bármelyik tagjának egyik tényezőjét ellentett jellel próbáljuk venni. Így tehát nem kapunk új felbontást.

Nem jöhet szóba a (3)-beliek helyére elsőnél magasabb fokú kifejezés sem – pl. egy vagy több másodfokú –, mert ilyenek négyzetében a legmagasabb fokú tag pozitív, és így összegük nem lehet 0, amint (2) jobb oldala kívánná.

3. Legutóbbi meggondolásunkat nem teszi feleslegessé az az észrevétel, hogy $4^3 - 2^3 = 56$-ra csak a $2^2 + 4^2 + 6^2$ felbontást adtuk, és könnyű belátni, hogy más ilyen felbontás nincs. Gondolni kell ugyanis arra, hogy e felbontás 2, 4, 6 alapszámait más (3) alakú kifejezések is kiadhatnák $n = 2$-vel.

II. megoldás: Ismert azonosság szerint

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2).$$

Innen az $x - y = 2$ értéket figyelembe véve, alkalmas csoportosítással azonnal adódik, hogy

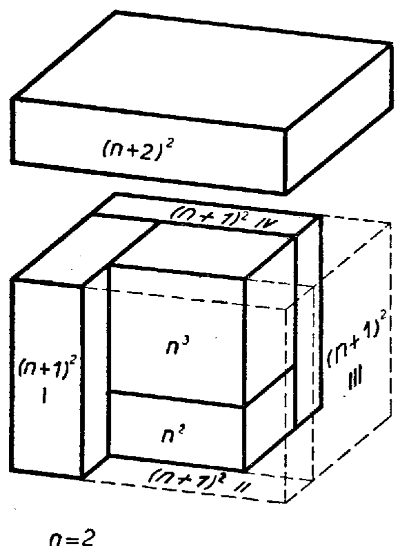
$$\begin{aligned} x^3 - y^3 &= 2x^2 + 2xy + 2y^2 = \\ &= x^2 + y^2 + (x + y)^2, \end{aligned}$$

amit bizonyítanunk kellett.

Megjegyzés: Pozitív n esetére a bebizonyított azonosságnak geometriai jelentést adhatunk, ha (1)-et a következő alakban írjuk:

$$(n + 2)^3 = n^3 + n^2 + (n + 2)^2 + 4(n + 1)^2. \tag{8}$$

Tekintsünk minden tagot egy-egy test térfogata mértékszámának. Így a köbök $n + 2$, ill. n egységnyi élű kockák, a négyzetek pedig hat olyan egységnyi magasságú, négyzetes oszlop térfogatát jelentik, amelyeknek alapéle rendre n, $n + 2$, ill. négy esetben $n + 1$ egység.



Így (8) azt fejezi ki, hogy a nagyobb kocka térfogata egyenlő a további 7 test térfogatának összegével. Ennél többet láthatunk be könnyen: a 7 testből, mindegyiket tömörnek tekintve, hézagtalanul össze is lehet állítani egy a nagyobbal egybevágó kockát. Fektessük le evégett az „n^2-térfogatú” oszlopot, állítsuk rá az „n^3”-kockát úgy, hogy a 4–4 oldallapjuk síkjai egybeessenek, így n egységnyi alapélű, $n + 1$ magasságú O_1 oszlopot kapunk. Állítsuk O_1 köré egy oldallapjukon állva, négyzetlapjukkal O_1 egy-egy oldallapjához zárva a négy $(n + 1)^2$ térfogatú oszlopot úgy, hogy egy-egy oldallapjuk a belső oszlop egy-egy oldallapjának síkjába essék, így $n + 1$ egységnyi magas és $n + 2$ alapélű O_2 oszlopot kapunk. Végül fektessük rá O_2-re az $(n + 2)^2$ térfogatú oszlopot úgy, hogy oldallapjaik síkjai egybeessenek.

2. feladat. *Határozzuk meg ügyesen a következő számot:*

$$\frac{12\,346 \cdot 24\,689 \cdot 37\,033 + 12\,347 \cdot 37\,034}{12\,345^2}.$$

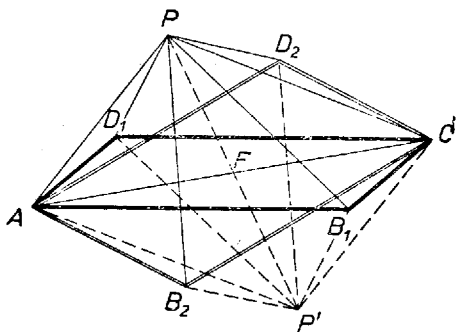
Megoldás: Vegyük észre, hegy a nevező 1-gyel, ill. 2-vel tér el a számlálóbeli szorzatok első tényezőitől, továbbá hogy a két szorzat utolsó tényezői a nevező 3-szorosánál 2-vel, ill. 1-gyel kisebbek, végül, hogy a 24 689 tényező 1 híján 2-szer akkora, mint a nevező. Ezért egyszerűsítést remélhetünk attól, ha a 12 345 számot átmenetileg c-vel jelöljük, evvel minden más előforduló számot a fentiek szerint egyszerűen kifejezünk és igyekszünk az így adódó kifejezést úgy átalakítani, hogy c értékének visszahelyettesítése után egyszerűen kiszámítható legyen. Valóban

$$\begin{aligned} &\frac{(c + 1)(2c - 1)(3c - 2) + (c + 2)(3c - 1)}{c^2} = \\ &= \frac{(6c^3 - c^2 - 5c + 2) + (3c^2 + 5c - 2)}{c^2} = \frac{6c^3 + 2c^2}{c^2} = \\ &= 6c + 2 = 2(3c + 1) = 2(3c - 1) + 4, \end{aligned}$$

ennélfogva a keresett számot az utolsó három alak bármelyikéből könnyen megkaphatjuk; értéke – pl. az utolsó alakból – $2 \cdot 37\,034 + 4 = 74\,072$.

3. feladat. *Szerkesszük meg az $ABCD$ paralelogrammát, ha ismerjük AC átlóját és csúcsainak a sík egy P pontjától mért PA, PB, PC, PD távolságát.*

Megoldás: A PAC háromszöget meg tudjuk szerkeszteni, mert ismerjük mind a három oldalát (1. ábra). A B és D pontok kitűzéséhez ismerjük a PBD háromszög PB és PD oldalát, és további adatot ad az a felismerés, hogy az AC és BD átlók F metszéspontja mindkét átlónak felezőpontja. Így a PAC háromszögből kiadódó PF szakasz PBD-nek is súlyvonala.



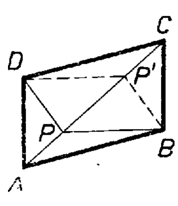
1. ábra

Adatainkból a PBD háromszög megszerkesztése, mint ismeretes, azon alapszik, hogy a háromszöget F-re tükrözve B és D egymás tükörképei lesznek, és P tükörképét P'-vel jelölve a $PBP'D$ négyszög paralelogramma. Eszerint $P'B = PD$ és $P'D = PB$, ennélfogva B-t a P körül PB és P' körül PD sugárral írt körök metszéspontja adja, D pedig a $PBP'D$ paralelogramma negyedik csúcsa lesz.

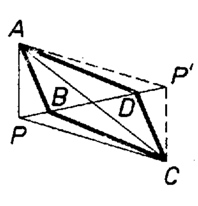
A kapott $ABCD$ négyszög megfelel a követelményeknek, mert csúcsai az előírt távolságokra vannak P-től, egyik átlója a kívánt AC hosszúság, végül a négyszög paralelogramma, mert átlói (F-ben) felezik egymást.

Mivel az ábrán F-re A és C, valamint P és P' tükrös párok, azért P' a PAC háromszöget paralelogrammává egészíti ki. Így P'-t F ismerete nélkül is kitűzhetjük. És mivel F-et tovább sem használjuk fel, megszerkesztése mellőzhető. Ezért F-et a diszkusszióban nem említjük.

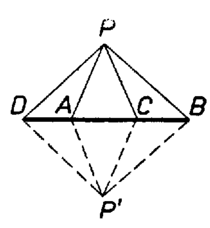
A PAC háromszög és vele az $APCP'$ paralelogramma egyértelműen megszerkeszthető, ha az adott AC, PA és PC szakaszok közül bármelyik kettőnek összege nagyobb a harmadiknál. A $PBP'D$ paralelogramma megszerkeszthető, ha a létrejött PP' és adott PB, PD szakaszok közül bármelyik kettő összege nagyobb, mint a harmadik, éspedig 2 megoldást kapunk, ha $PD \neq PB$, ha pedig $PD = PB$, akkor egyet. Eszerint $ABCD$-re is a megoldások száma 2. Mert bár a $PBP'D$-re adódó két megoldás egybevágó – egymásnak PP'-re tükörképei – a velük adódó $ABCD$ paralelogrammák mégsem egybevágók, mert PP' az $APCP'$ paralelogrammának általában nem tengelye. Ha azonban $PA = PC$, és így $PAP'C$ rombusz, akkor a ($PB \neq PD$ mellett) adódó két $ABCD$ paralelogramma egymásnak PP'-re tükörképe.



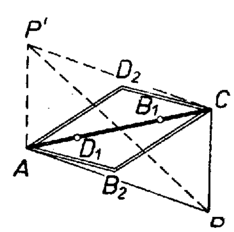
2. ábra



3. ábra



4. ábra



5. ábra

Eljárásunk akkor is használható, ha vagy az első három, vagy pedig az utóbbi három egyenlőtlenség közül az egyikben egyenlőség teljesül, mert ilyenkor P és P' az AC egyenesre, ill. B és D a PP' egyenesre esnek, de a 4 pont egy egyenesre esése csak egyszer fordul elő (2-3. ábra). Ha mindkét egyenlőtlenséghármas közül egyben-egyben egyenlőség lép fel, akkor mind a hat pont egy egyenesre esik, a paralelogramma elfajul egyenesszakasszá.

Kivétel a legutóbbi megjegyzésünk alól a $PA = PC = AC/2$ eset, amikor C az A pont P-re vonatkozó tükörképének adódik, és így P' egybeesik P-vel, $PP' = 0$. Ilyenkor ugyanis a $PBP'D$ paralelogramma is elfajult és vagy egyáltalán nem szerkeszthető még elfajultan sem, – ha ti. $PD \neq PB$ – vagy végtelen sokféleképpen szerkeszthető – ha $PD = PB$. Ilyenkor tulajdonképpen a két átlójából kellene megszerkeszteni a paralelogrammát.

Megjegyezzük még, hogy az $ABCD$ paralelogramma akkor is adódhat elfajultnak, ha sem az $APCP'$, sem a $PBP'D$ paralelogramma nem elfajult, pl. ha $PA = PC (> AC/2)$ és $PB = PD$ (4. ábra); sőt az egyik megoldás $PA \neq PC$ és $PB \neq PD$ esetén is lehet elfajult (5. ábra).

Megjegyzés: A feladat könnyen visszavezethető egy jól ismert négyszögszerkesztési feladatra. Toljuk el a PCD háromszöget úgy, hogy a CD oldal a vele párhuzamos és egyenlő AB oldalra kerüljön. Az így keletkező $APBP'$ négyszögben adottak az oldalak. Hogy a paralelogramma AC átlóját is kapcsolatba hozzuk ezzel a négyszöggel, figyeljük meg, hogy a $BCPP'$ négyszög paralelogramma, s így BP és CP' átlóinak E metszéspontja mindkét átlót felezi. Így az $APBP'$ négyszög két nem szomszédos oldalának, AP'-nek és BP-nek a felezőpontjait összekötő EF szakasz egyben az ACP' háromszögnek középvonala, tehát AC felével egyenlő, s így adottnak tekinthető. A versenyfeladat tehát ekvivalens a következő ismert feladattal:[1] szerkesszünk négyszöget, ha adott az oldalak hossza és két nem szomszédos oldal felezőpontjának távolsága. A keletkező négyszög adódhat konkávnak vagy hurkoltnak is. (Ezért is kerültük el a „szemközti oldalak” megjelölést.)

[1] Lásd pl. az I. o. gimn. tankönyvben (1959. évi kiadás) a 242. o. 18. feladatában.