1. feladat. *Állapítsuk meg az*

$$y=\frac{2x^2+6x+6}{x^2+4x+5}$$

függvény maximumát és minimumát!

I. megoldás: Fejezzük ki az adott kapcsolatból x-et y-nal. Így megadhatjuk, mely y-okhoz lehet x-et kiszámítani, más szóval, hogy mely y számokhoz van olyan x érték, amelyre függvényünk az y értéket veszi fel, vagyis mi függvényünk értékkészlete. Ebből már kiválaszthatjuk a keresett maximumot, ill. minimumot – hacsak az értékkészletben van legnagyobb, ill. legkisebb szám.

A nevező sehol sem 0, mert $x^2+4x+5=(x+2)^2+1\geq 1$, ezért az átszorzással és rendezéssel adódó

$$(y-2)x^2+(4y-6)x+(5y-6)=0$$

kapcsolat ekvivalens az eredetivel. Innen

(1) $$x=\frac{-4y+6\pm\sqrt{-4y^2+16y-12}}{2(y-2)},$$

hacsak $y\neq 2$, és $x=-2$, ha $y=2$.

x a gyökképletből akkor és csak akkor adódik valósnak, ha a diszkrimináns nem negatív, vagyis ha – a másodfokú kifejezést mindjárt szorzattá alakítva –

$$-4(y-1)(y-3)\geq 0.$$

Ez pedig nyilván akkor és csak akkor teljesül, ha

$$1\leq y\leq 3.$$

Ez a kettős egyenlőtlenség írja le függvényünk teljes értékkészletét, mert ennek a külön úton nyert fenti $y=2$ szám is eleget tesz. Eszerint függvényünknek van maximuma is, minimuma is, éspedig az

$$y_{\max}=3,\qquad \text{ill.}\qquad y_{\min}=1$$

érték. Ezeket a függvény (1) szerint az

$$x_{\max}=-3,\qquad \text{ill.}\qquad x_{\min}=-1$$

helyen veszi fel.

Megjegyzés. Néhány dolgozat a helyes eredményre a következő téves meggondolással jutott el: „maximum és minimum azok az értékek, amelyeket a függvény csak egyszer vesz fel, ezek azok, ahol a diszkrimináns 0.” Eszerint minden elsőfokú függvény számára minden érték maximum volna és egyben minimum is; másrészt az $y=1$ érték nem volna maximuma az $y=\sin x$ függvénynek, úgyszintén $y=-1$ sem volna ennek minimuma, mert mindegyik értéket végtelen sokszor veszi fel. Azt mutatja ez, hogy a szélső értékek fogalma egyedül a másodfokú függvényre alapult.

II. megoldás. Osztással és a nevezőben teljes négyzetté való kiegészítéssel az adott kifejezés így alakítható:

$$y=2-\frac{2x+4}{x^2+4x+5}=2-\frac{2(x+2)}{(x+2)^2+1},$$

majd $x+2$ helyére új z változót írva

(2) $$y=2-\frac{2z}{z^2+1}=2-2y_1,\quad \text{ahol}\quad y_1=\frac{z}{z^2+1}.$$

Eszerint y-nak ott van maximuma, ahol az y_1 függvény minimális értéket vesz fel, és ott van minimuma, ahol y_1 maximális. y_1 lehet pozitív, negatív és 0, mert ugyanolyan jelű, mint a z számláló, hiszen nevezője pozitív, $z=0$ mellett pedig $y_1=0$; ezért y_1 maximuma csak pozitív, minimuma csak negatív érték lehet. Elég y_1-et pozitív z-k mellett vizsgálni, mert z és $-z$ mellett felvett értékei csak előjelben különböznek, tehát az így meghatározandó maximum értékének, és helyének (-1)-szerese megadja a minimum értékét és helyét.

További átalakítással

$$y_1=\frac{z}{z^2+1}=\frac{1}{z+\dfrac{1}{z}}=\frac{1}{y_2},\quad \text{azaz}\quad y_2=z+\frac{1}{z},$$

így y_1 maximuma egyenlő az y_2 függvény minimumával. Vegyük észre, hogy pozitív z mellett az y_2 összeg két tagjának mértani közepe 1, állandó. Ismeretes másrészt, hogy pozitív számok számtani közepe sohasem kisebb mértani közepüknél, és akkor egyenlő vele, ha a számok egyenlők. Eszerint y_2 felének minimuma 1, így $y_{2,\min}=2$, és ez akkor adódik, ha z az a pozitív szám, amelyre $z=1/z$, vagyis $z=1$.

Most már y_1 maximuma $1/2$, és a fentiek szerint minimuma a $z=-1$ helyen $y_{1,\min}=-1/2$; végül (2) szerint y minimuma 1, maximuma 3, és e szélső értékeket $x=z-2$ figyelembevételével az $x=-1$, ill. $x=-3$ helyen veszi fel.

III. megoldás: Alakíthatjuk y-t a következők szerint is:

$$y=1+\frac{x^2+2x+1}{x^2+4x+5}=1+\frac{(x+1)^2}{(x+2)^2+1},$$
$$y=3-\frac{x^2+6x+9}{x_2+4x+5}=3-\frac{(x+3)^2}{(x+2)^2+1}.$$

Az első alak második tagja sohasem negatív, mert számlálója teljes négyzet és nevezője pozitív. Eszerint y minimumát $x+1=0$-nál, vagyis az $x=-1$ helyen veszi fel; itt a második tag 0, és y értéke 1. Hasonlóan a második alak kivonandója akkor legkisebb, ha $x+3=0$, azaz $x=-3$, és itt értéke 0, tehát y maximuma 3.

2. feladat. *Adott egy kör és a kör belsejében fekvő P pont. Tekintsük a kör egy félkörnél kisebb AB ívét és jelöljük ennek felezőpontját F-fel. Bizonyítandó, hogy ha*

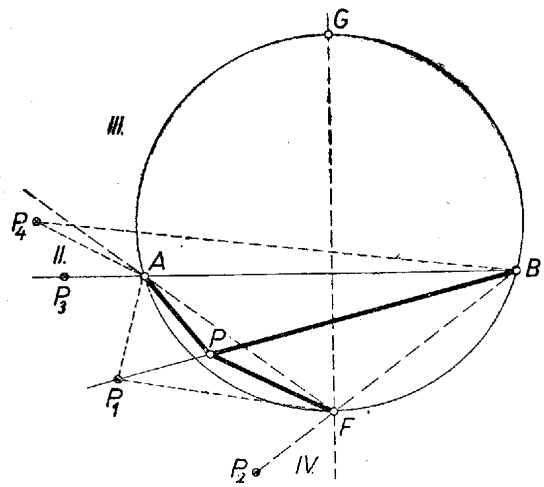
(1) $$PA<PB$$

akkor

(2) $$APF\sphericalangle > FPB\sphericalangle.$$

I. megoldás: A feltevések folytán P az F ponthoz tartozó FG átmérővel kettévágott k kör azon félkörének belsejében van, amelynek ívén A fekszik.

a) Tulajdonképpen csak az AFG szögtartományban fekvő P pontokra kell bizonyítást adnunk, mert az FA húrral lemetszett kisebb körszeletben levő P pontokra az állítás magától értetődő, hiszen ilyenkor A és B az FP egyenes ugyanazon partján vannak, és ezért az FPB szög része az APF szögnek (1. ábra).

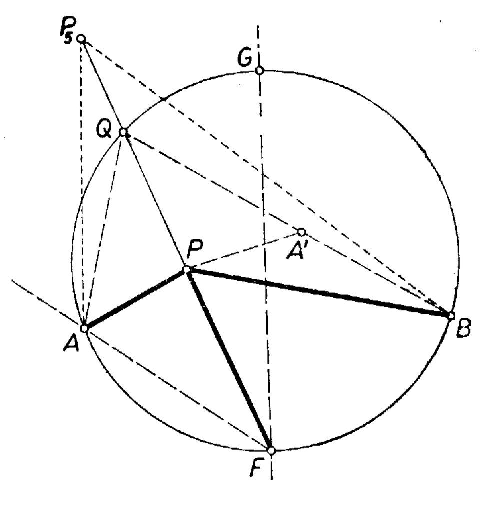


1. ábra

Másképpen: ilyen esetekben a PB félegyenes benne van az APF szögtartományban.

b) Ugyanez áll akkor is, ha P az FA húron van, mert ilyenkor az APF szög bármelyik irányú forgással 180°, az FPB szög pedig kisebb.

c) Ha P az AFG szögtartományban van, akkor FP szétválasztja A-t és B-t. (2. ábra).



2. ábra

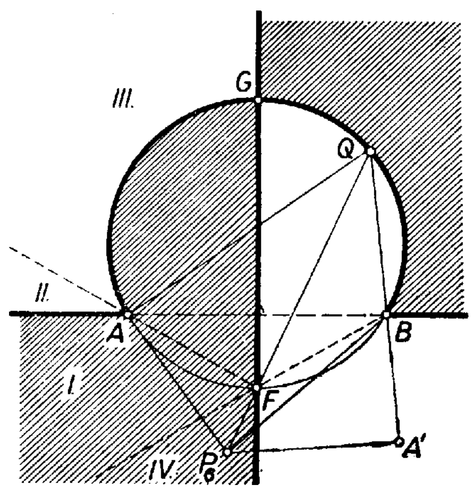
Tükrözzük FP-re az APF szöget, legyen az A pont tükörképe A'. Ekkor elegendő azt igazolnunk, hogy az FPB szög része az FPA-val egyenlő FPA' szögnek. – Messe az FP egyenes k-t másodszor Q-ban. Így egyrészt az FQA és FQB szögek egyenlők, mert k-nak a száraik közti FA, FB ívei egyenlők, másrészt a tükrözés folytán az FQA és FQA' szögek egyenlők, és ezért A' és QB egyenesen van, továbbá $QA' = QA < QB$, tehát A' a QB húr belső pontja. Így pedig a PB félegyenes valóban az $A'PF$ szögtartományban van.

A fentiekben az állítást P minden lehetséges helyzetére igazoltuk.

Megjegyzések. 1. Nem használtuk fel, hogy az F-fel felezett AB ív kisebb félkörnél, ezért az állítás bármekkora AB ívre érvényes.

2. A bizonyítás *a)* részében nem használtuk fel, hogy P a k-n belül van, így meggondolásunk az ABF szögtartomány k-n és rajta kívül fekvő I. része minden pontjára érvényes (az 1. ábrán P_1), úgyszintén a BF szakasz F-en túli meghosszabbításának P_2 pontjaira is, mert így a P_2B és P_2F félegyenesek egybeesnek, szögük 0. Az I. síkrész másik határoló félegyenesén, a BA szakasz A-n túli meghosszabbításán levő P_3 pontokra viszont a két kérdéses szög azonos.

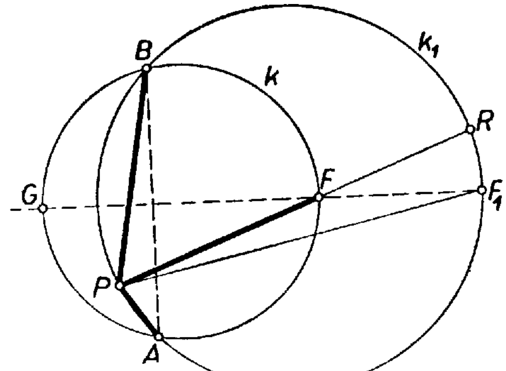
Kézenfekvő most már legalább vázlatosan áttekinteni a kérdéses szögek nagyságviszonyát minden az (1)-et teljesítő P pontra. Ha P kilép I-ből BA-nak A-n túli meghosszabbításán át, de nem lépi át FA-t (II. síkrész, P_4), akkor a PB félegyenes kilép az APF szögtartományból, APF része BPF-nek, (2) iránya ellentétesre fordul. Ugyanez adódik a III. síkrészben, vagyis ha P az AFG szögtartománynak k-n kívüli pontja (a 2. ábrán P_5), mert ilyenkor a *c)* alatti Q pont F és P_5 közé esik, és így $A'P_5F\sphericalangle < BP_5F\sphericalangle$.



3. ábra

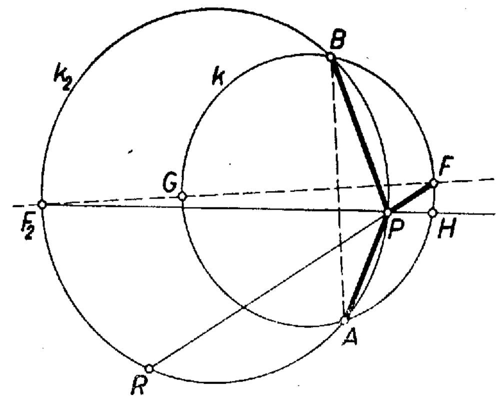
Végül a IV. síkrészben választott P_6-tal Q a GB íven adódik (3. ábra), ezért $QA' > QB$, így $AP_6F\sphericalangle = A'P_6F\sphericalangle > BP_6F\sphericalangle$, itt tehát érvényes (2). – Most már a $PA > PB$ követelmény mellett a megfelelő síkrészek határvonalait FG-re tükrözéssel kapjuk, így a 3. ábra csíkozott részein a kérdéses szögek közül APF nagyobb, a világosakon FPB nagyobb, a határvonalakon pedig a két szög – amint az könnyen belátható – egyenlő. *(Mezei Ferenc* „térképvázlata”).

A további megoldásokban csak a fenti *c)* esettel foglalkozunk, ezt 3 alesetre bontjuk fel aszerint, hogy P az AB-nek F-fel ellentétes, ill. megegyező partján van – vagyis az utóbbi alesetben az ABF háromszögben – vagy pedig magán az AB húron. – Mindkét további megoldás *Muszély György* megoldásainak egyszerűsítése.



4. ábra

II. megoldás: $c_1)$ Ha P az AB-nek F-fel ellentétes oldalán van (4. ábra), akkor a kérdéses APF és FPB szögek a kisebb APB szögnek részei. Az A, B, P pontokon átmenő k_1 kör P-t nem tartalmazó, vagyis k-n kívül levő AB ívének F_1 felezőpontja az AB egyenesnek F-fel egyező oldalára, vagyis GF-nek F-en túl való meghosszabbítására esik. Így F_1 az APF szögtartományban van, F pedig az F_1PB szögtartományban. Ámde PF_1 felezi a kisebb APB szöget, ennélfogva az APF szög F_1PF szöggel nagyobb, az FPB szög pedig ugyanennyivel kisebb az APB szög felénél, ez megfelel az állításnak.



5. ábra

$c_2)$ Ha P az AB-nek F-fel egyező oldalán van (5. ábra), akkor az A, B, P pontokon átmenő k_2 kör P-t nem tartalmazó, vagyis k-n kívül levő AB ívének F_2 felezőpontja az AB egyenesnek F-fel ellentétes oldalára, FG-nek G-n túl való meghosszabbítására esik. A kérdéses APF és FPB szögek egyenes szögnél nagyobb összegét ebben az alesetben F_2P-nek P-n túl való PH meghosszabbítása felezi. A PH félegyenes FG-nek A-t tartalmazó oldalán van, ezért az APF szöget osztja részekre. Így az APF szög nagyobb, FPB pedig kisebb az $APH = HPB$ szögnél. Ezt kellett bizonyítanunk.

$c_3)$ Végül ha P az AB szakaszon van, akkor (2) fennáll, mert APF tompaszög, FPB pedig hegyesszög.

Megjegyzések. 1. A $c_2)$ aleset meggondolása nem alkalmazható az FA húrral lemetszett körszeletben felvett P-re, mert ilyen esetben a $180°$-nál nagyobb APF szöget hasonlítanók az FPB szöghöz.

2. Lényegében a fenti meggondolást mondjuk el másképpen annak az R pontnak a helyzetét tekintetbe véve, ahol a PF egyenes a k_1, ill. k_2 kört másodszor metszi.

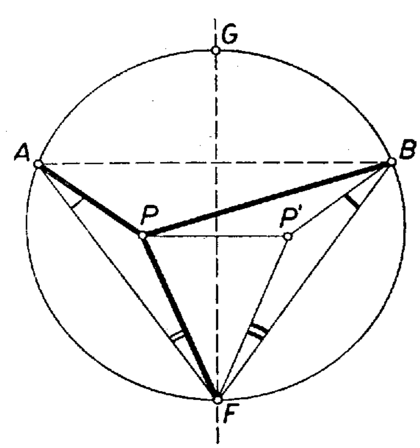
A $c_1)$ alesetben (4. ábra) F a k_1-re nézve belső pont, ezért R egyrészt a PF szakasz F-en túl való meghosszabbításán van, FG-nek P-vel ellentétes, vagyis B-vel egyező oldalán. Másrészt R a P-t nem tartalmazó AB ívnek pontja. Ezek szerint R a (rövidebb) BF_1 íven van. Így k_1-nek AF_1R íve hosszabb a BR ívnél, tehát $APR\sphericalangle > RPB\sphericalangle$, vagyis $APF\sphericalangle > FPB\sphericalangle$.

A $c_2)$ alesetben (5. ábra) F a k_2-re nézve külső pont, ezért R egyrészt az FP szakasz P-n túli meghosszabbításán van, FG-nek P-vel egyező, B-vel ellentétes oldalán, másrészt az AF_2B íven. Így R a (rövidebb) AF_2 ívnek pontja, $\widehat{AR} < < \widehat{RB}$, $APR\sphericalangle < RPB\sphericalangle$, ezért $180° - APR\sphericalangle > 180° - RPB\sphericalangle$, azaz $APF\sphericalangle > FPB\sphericalangle$.

III. megoldás: A feladat állítása akkor és csak akkor igaz, ha az APF háromszög A és F-nél levő (belső) szögeinek összege kisebb, mint a BPF háromszög B és F-nél levő (belső) szögeinek összege. Ezt fogjuk bizonyítani.

Legyen P tükörképe FG-re P', így az $APP'B$ négyszög konvex trapéz.

A $c_1)$ alesetben P' az FBP szögtartományban van (6. ábra).



6. ábra

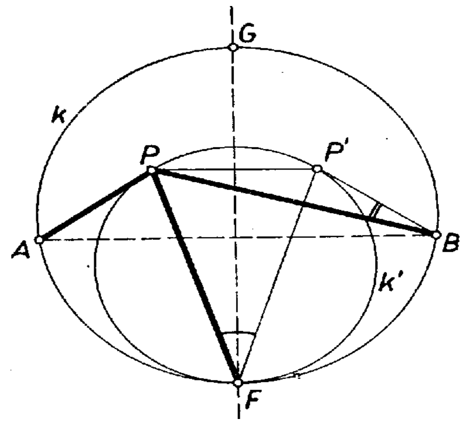
Ugyanis P és P' az ABP háromszög belsejében vannak, tehát $P'BA\sphericalangle < FBA\sphericalangle$, másrészt az ABP háromszögből (1) alapján $PBA\sphericalangle < PAB\sphericalangle = P'BA\sphericalangle$. Ennélfogva

(3) $$PAF\sphericalangle = P'BF\sphericalangle < PBF\sphericalangle.$$

Másrészt P' a BFG szögtartományban van, amely része BFP-nek, ezért

(4) $$PFA\sphericalangle = P'FB\sphericalangle < PFB\sphericalangle.$$

Most már (3) és (4) két-két szélső tagjának összeadásával a kívánt egyenlőtlenség adódik.



7. ábra

Ha pedig AB elválasztja P-t és F-et (7. ábra), akkor egyrészt

(5) $$PFB\sphericalangle - PFA\sphericalangle = PFB\sphericalangle - P'FB\sphericalangle = PFP'\sphericalangle,$$

ez pedig PP' látószöge F-ből; másrészt

(6) $$PAF\sphericalangle - PBF\sphericalangle = P'BF\sphericalangle - PBF\sphericalangle = PBP'\sphericalangle,$$

ez pedig PP' látószöge B-ből; ekkor B ugyanazon oldalán fekszik PP'-nek, mint F. – Mármost a $PP'F$ háromszög köré írt k' kör érinti k-t F-ben, minden más pontja k belsejében van, így B a k'-re nézve külső pont. Ezért PP'-nek B-ből vett látószöge kisebb az F-ből vett látószögénél, azaz (5) és (6) alapján

$$PAF\sphericalangle - PBF\sphericalangle < PFB\sphericalangle - PFA\sphericalangle.$$

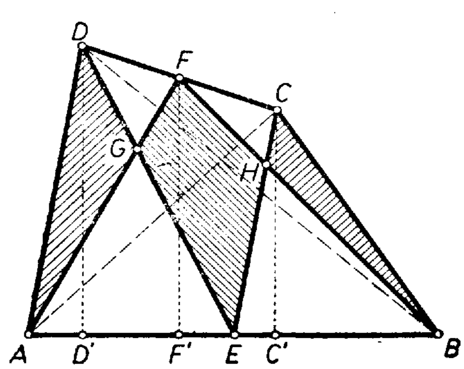
Innen pedig átrendezéssel

$$PAF\sphericalangle + PFA\sphericalangle < PBF\sphericalangle + PFB\sphericalangle,$$

amit bizonyítani akartunk.

3. feladat: *Legyen az $ABCD$ konvex négyszög AB és CD oldalának felezőpontja E és F, az AF és DE metszéspontja G, a BF és CE metszéspontja H. Bizonyítandó, hogy az AGD és BHC háromszögek területének összege egyenlő az $EHFG$ négyszög területével.*

I. megoldás: Húzzuk meg a négyszög AC és BD átlóit. Az AF és CE szakasz az ACD, ill. ABC háromszögben súlyvonal, tehát a háromszöget két egyenlő területű háromszögre osztja (8. ábra):



8. ábra

(1) $$ADF = ACF, \qquad BCE = ACE$$

(az idomok területét ugyanúgy jelöljük, mint magukat az idomokat). Ezekből összeadással

(2) $$ADF + BCE = AECF,$$

mert az $ABCD$ négyszög konvexsége folytán D és B az AC-nek ellentétes partján feküsznek, és ezért ugyanez áll F és E-re is. Figyelembe véve a DE és BF egyenesekkel való felbontást is, (2)-t így írhatjuk:

(3) $$ADG + DGF + BCH + BHE = AEG + CFH + EHFG$$

(mindkét oldalon az $ABCD$ négyszög területének fele áll).

Hasonlóan a DE és BF súlyvonalakkal két-két egyenlő részre osztott ABD és BCD háromszögekből

(4) $$ADE + BCF = EBFD,$$

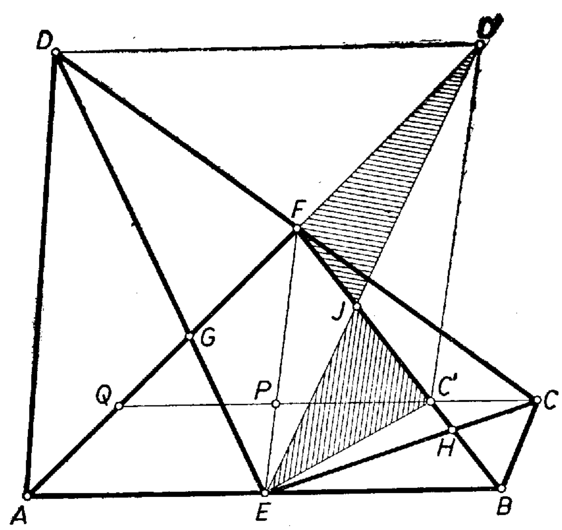
amit részletesebben így írhatunk:

(5) $$ADG + AEG + BCH + CFH = BHE + DGF + EHFG.$$

Már most (3) és (5) összegéből a két oldalon fellépő egyenlő tagok elhagyásával és 2-vel való osztással a bizonyítandó egyenlőséget kapjuk:

$$ADG + BCH = EHFG.$$

II. megoldás: Ismeretes, hogy a trapézt átlói négy olyan háromszögre bontják, melyek közül a szárakra támaszkodók egyenlő területűek. Ezt a tételt fogjuk háromszor felhasználni. Feltehetjük, hogy D és C közül D van távolabb AB-től. Húzzunk D-n és C-n át AB-vel párhuzamost és jelöljük ezeknek AF meghosszabbításával, ill. BF-fel való metszéspontját D', ill. C'-vel (9. ábra), továbbá ED' és FC' metszéspontját J-vel.



9. ábra

$AED'D$ és $EBCC'$ trapézok, így

$$AGD = EGD'$$

és

$$BCH = EHC'.$$

Az EGD' és EHC' háromszögek együttesen nem takarják le az $EHFG$ négyszöget, kinyúlik az $FD'J$, nincs lefedve az $EC'J$ háromszög. Ha sikerül igazolnunk, hogy ezek egyenlő területűek, akkor a feladat tételét bebizonyítottuk. Ehhez viszont elegendő megmutatni, hogy $C'D'$ párhuzamos EF-fel, mert ekkor az $EC'D'F$ négyszög trapéz voltából következik állításunk.

Jelöljük CC'-nek EF és AF-fel való metszéspontját P, ill. Q-val. Így EF az AB szakasszal együtt a vele párhuzamos QC' szakaszt is felezi. Másrészt a QCF és $D'DF$ háromszögek egybevágóságából következik, hogy $QF = FD'$. Tehát P, ill. F a $QC'D'$ háromszög QC', ill. QD' oldalának felezőpontja, és így valóban PF párhuzamos $C'D'$-vel.

Ha D és C egyenlő távolságra esnek AB-től, akkor D' és C' egybeesnek F-fel, és így az EGD' és EHC' háromszögek együtt pontosan lefedik az $EHFG$ négyszöget.

III. megoldás: Azt mutatjuk meg, hogy

$$AED + EBC = ABF,$$

illetőleg e területeket 2, 2, ill. 3 idom területének összegeként felírva

$$AEG + ADG + EBH + BCH = AEG + EBH + EHFG.$$

Innen ugyanis a két oldal egyenlő tagjainak elhagyásával a bizonyítandó tételt kapjuk.

Valóban, D, F, C-nek AB-n levő vetületét rendre D', F', C'-vel jelölve (8. ábra) a $CDD'C'$ idom trapéz, és benne FF' a középvonal, tehát

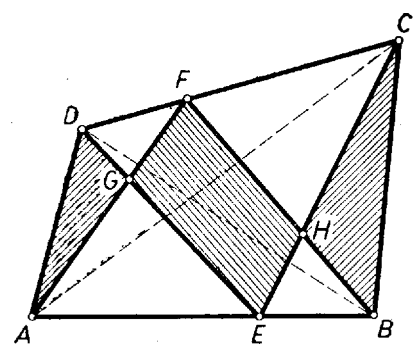
$$\frac{DD'}{2} + \frac{CC'}{2} = FF'.$$

Innen pedig mindkét oldalt AE-vel szorozva, majd az $AE = EB = AB/2$ egyenlőségeket figyelembe véve

$$\frac{1}{2}AE \cdot DD' + \frac{1}{2}EB \cdot CC' = \frac{1}{2}AB \cdot FF'$$

adódik, ami állításunkat igazolja.

Megjegyzések. 1. A feladat állítása általánosítható: a kimondott területegyenlőség akkor is fennáll, ha E és F az AB, ill. CD oldalt (nem felezi, hanem) ugyanolyan q arányban osztja két-két részre: $AE : EB = q$, azaz $AE = q \cdot EB$, és ugyanígy $CF = q \cdot FD$ (10. ábra, itt $q = 2$).



10. ábra

Az állítás mindhárom fenti megoldás gondolatmenetével igazolható; alább az I. megoldás módosításával bizonyítjuk. Az ott szereplő (1)–(3) egyenlőségek jobb oldala most a bal oldal q-szorosával lesz egyenlő, (4) és (5) bal oldala viszont a jobb oldal q-szorosával. Így a (3) és (5)-ből keletkezett egyenlőségek összegében 2 helyett $(1 + q)$-val osztva kapjuk az általánosítás állítását. Ez az általánosítás *Bollobás Béla* dolgozatában szerepel.

2. Könnyű belátni, hogy a nem konvex (vagyis az egy 180°-nál nagyobb belső szöggel bíró, valamint a hurkolt) négyszögekre az állítás nem igaz.