1. feladat: *Hány olyan legfeljebb hatjegyű természetes szám van, amelyben előfordul az 1-es számjegy?*

Előzetes megjegyzés. Számos versenyző azt határozta meg, hány az 1-es számjegyet tartalmazó szám [1], van különkülön az egy-, a két-, ..., a hatjegyű számok között, és a feladat kérdésére a választ e hat szám összegével adta meg. Ehhez hasonló, de egyszerűbb megoldás a következő.

I. megoldás: Legfeljebb hatjegyűek azok a számok, amelyek leírásához egy, vagy két, vagy ..., vagy hat számjegy szükséges, más szóval hat számjegy elegendő. Mindezek pontosan hat jeggyel is írhatók, ha a 0 jegyet a többi jegyektől meg nem különböztetve kezdő számjegyként is megengedjük, és minden legfeljebb öt jeggyel írt szám elé annyi 0-t gondolunk írva, hogy jegyeinek száma hat legyen.

Jelöljük az 1-es jegyet tartalmazó legfeljebb n-jegyű számok számát F_n-nel. Így nyilván $F_1 = 1$, mert az egyjegyű számok közül egy felel meg: az 1, és feladatunk F_6 megállapítása. Tegyük fel, hogy F_n-et már ismerjük; ekkor F_{n+1}-et a következő meggondolással kaphatjuk meg. Csoportosítsuk az 1-es jegyet tartalmazó legfeljebb $n+1$ jegyű számokat kezdő jegyük szerint. Az 1-essel kezdődők száma 10^n, mert bennük a további n helyre tetszés szerint írhatunk jegyeket, mindegyikre a 10-féle jegy mindegyikét, egymástól függetlenül. [2] A $0,\ 2,\ 3,\ 4,\ \dots\ 9$-essel kezdődő $n+1$ jegyűek száma pedig minden csoportban F_n, hiszen ezeknek a hátralevő n jegyű részükben kell 1-est tartalmazniuk. Ezzel valamennyi megfelelő $n+1$-jegyű számot figyelembe vettük, mindegyiket pontosan egyszer, tehát

$$F_{n+1} = 10^n + 9 \cdot F_n.$$

Ezzel ún. *rekurzív*[3] képletet kaptunk F_n kiszámítására. Így $F_2 = 10 + 9 \cdot F_1 = 19$, $F_3 = 100 + 9 \cdot 19 = 271$, $F_4 = 1\,000 + 9 \cdot 271 = 3\,439$, $F_5 = 10\,000 + 9 \cdot 3\,439 = 40\,951$, végül $F_6 = 100\,000 + 9 \cdot 40\,951 = 468\,559$. – Ezzel a kérdésre a választ megadtuk.

II. megoldás: Csoportosítsuk a szóban forgó számokat aszerint, hogy a legértékesebb helyen álló, más szóval balról első 1-es jegyük rendre az egyes, a tízes, a százas, ..., a százezres *helyen* áll. Így hat csoport jön létre és minden számunk pontosan egy csoportba jut. Az előállításban az említett 1-es helyének kivételével mind az öt további helyet úgy kell betöltenünk, hogy az említett 1-es után bármely jegy állhat, előtte pedig bármely 1-től különböző jegy.

Az első csoport számainak az egyes értékű, vagyis balról az utolsó jegye 1-es, több 1-est nem tartalmaznak. Bennük a tízes értékű helyre az 1-estől különböző 9 jegy mindegyikét figyelembe kell vennünk. Bármelyiket véve tízesnek a százas értékű jegy ismét 9-féleképpen töltendő be, így a tízes és százas értékű helyeken $9 \cdot 9$-féle betöltés lehetséges. Ugyanígy a további három hely is 9-féleképpen tölthető be, tehát e csoport 9^5 számot tartalmaz.

A második csoportba tartozó számok tízes értékű jegye 1, a mögötte álló egyes értékű helyre mind a 10 jegyet írhatjuk, az előtte álló négy jegyet pedig ismét 9-féleképpen választhatjuk meg, így ebben a csoportban $9^4 \cdot 10$ számot kapunk. – Tovább haladva csoportról csoportra eggyel-eggyel több hely tölthető be 9 helyett 10-féleképpen, így az 1-est tartalmazó számok száma a hat csoportból összesen:

$$N = 9^5 + 9^4 \cdot 10 + 9^3 \cdot 10^2 + 9^2 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^4 + 10^5.$$

Vegyük észre, hogy e hat tagú összeg tagjai mértani sorozatot alkotnak 10/9 hányadossal, így az összegképlettel $N = 468\,559$.

III. megoldás: Kombinatorikai ismeretekre és a binomiális tételre támaszkodva a kérdéses számok számát az előzőkhöz hasonlóan a bennük fellépő 1-esek *száma* szerint csoportosított előállításuk alapján is megkaphatjuk, a számokat itt is hatjegyűre kiegészített alakjukban állítva elő. Az egyetlen 1-est tartalmazó számok 1-esét a 6 hely mindegyikén kell figyelembe vennünk, a többi 5 helyen pedig a további 9 jegyet minden lehetséges módon, tehát az ilyen számok száma $6 \cdot 9^5$. A pontosan két, három, ..., hat 1-est tartalmazó számok 1-eseinek helyét rendre

$$\binom{6}{2}, \quad \binom{6}{3}, \quad \binom{6}{4}, \quad \binom{6}{5}, \quad \binom{6}{6} = 1$$

féleképpen választhatjuk meg és minden egyes megválasztás után a többi $4,\ 3,\ 2,\ 1$ helyet $9^4,\ 9^3,\ 9^2, 9$-féleképpen tölthetjük be, ill. az utolsó esetben készen is vagyunk, nincs további betöltendő hely. Ezek alapján a keresett szám

$$N = 6 \cdot 9^5 + \binom{6}{2} \cdot 9^4 + \binom{6}{3} \cdot 9^3 + \binom{6}{4} \cdot 9^2 + \binom{6}{5} \cdot 9 + 1.$$

Vegyük észre, hogy N ezen kifejezéséhez első tagként 9^6-ot adva al $(9+1)^6$ hatvány kifejtését kapjuk. Ennek alapján

$$N = (9+1)^6 - 9^6 = 10^6 - 9^6 = 1\,000\,000 - 531\,441 = 468\,559.$$

IV. megoldás: A legutóbbi eredményhez egyszerűbben így juthatunk el. Tekintsük valamennyi hatjegyű és hatjegyűen írható számot, beleértve 0-t is a 000 000 alakban, ezek száma $999\,999 + 1$, másképpen 10^6, mert mind a hat

[1] A feladat tartalmának megfelelően elég „természetes szám" helyett röviden „szám"-ot mondanunk.

[2] Másképpen: e számok $100\ \dots\ 0$-tól $199\ \dots\ 9$-ig terjednek, ahol a 0-ok, ill. 9-esek száma n, – így számuk $199\ \dots\ 9 - 9\ \dots\ 99 = 100\ \dots\ 0 = 10^n$.

[3] Szó szerint: visszafutó; az előzőre támaszkodó.

helyre mind a 10 jegyet egymástól függetlenül sorra vesszük. A követelménynek megfelelő számokhoz úgy jutunk, ha elhagyjuk az 1-es jegyet nem tartalmazó számokat, más szóval mindazokat, amelyekben a 6 hely mindegyikén 1-estől különböző jegy áll. Ezek száma 9^6, tehát $N = 10^6 - 9^6$. (Eközben a 0-t is elhagytuk.)

Megjegyzések: 1. A II. megoldásban kapott összeget $10 - 9$ alakban 1-gyel szorozva a III. megoldásban kapott $10^6 - 9^6$ alakra hozhatjuk.

2. A IV. megoldásban azt használtuk fel, hogy valamennyi legfeljebb hatjegyű természetes számnak összessége, ill. az 1-es nem tartalmazása miatt elhagyandó számok összessége – a 0-t mindkét összességbe beszámítva – azonos a 10-, ill. 9-féle számjegy ismétléses 6-odosztályú variációival.

3. Általánosítások: *a)* Egyik megoldásban sem használtuk ki, hogy a kitüntetett számjegy éppen az 1-es. Eszerint azoknak a legfeljebb hatjegyű természetes számoknak a száma, amelyekben egy adott tetszőleges (0-tól különböző) jegy előfordul: 468 559.

b) Mindegyik megoldás gondolatmenete akkor is alkalmazható, ha az olyan legfeljebb n-jegyű természetes számok számát keressük, amelyekben egy megadott (0-tól különböző) számjegy előfordul. Ezek száma (pl. a IV. megoldásból) $10^n - 9^n$.

c) Ugyanezt a kérdést egy tetszőleges k alapú számrendszerben vizsgálva – ahol k az 1-nél nagyobb természetes szám, és a figyelembe vett számjegy nem a 0, – a követelménynek eleget tevő számok száma

$$k^n - (k-1)^n.$$

2. feladat: *a, b, c olyan számok, melyekre $4ac - b^2$ nem-negatív és „a" pozitív. Bizonyítandó, hogy*

$$a + c - \sqrt{(a-c)^2 + b^2} \leq \frac{4ac - b^2}{2a}\,. \tag{1}$$

Mikor áll fenn egyenlőség?

I. megoldás: Igyekezzünk az (1) egyenlőtlenséget olyan alakra hozni, melynek helyessége már nyilvánvaló.

Szorozzuk meg (1)-et a feltevés szerint pozitív $2a$ számmal, elegendő az így nyert

$$2a^2 + 2ac - 2a\sqrt{(a-c)^2 + b^2} \leq 4ac - b^2$$

egyenlőtlenséget igazolni, vagy ehelyett is az átrendezéssel keletkezett

$$2a^2 - 2ac + b^2 \leq 2a\sqrt{(a-c)^2 + b^2} \tag{2}$$

egyenlőtlenséget.

a) Ha itt a bal oldal negatív, azaz $2a^2 - 2ac + b^2 < 0$, akkor az egyenlőtlenség teljesül, mert a jobb oldal a négyzetgyök egyértelmű értelmezése, valamint a feltevés folytán nem lehet negatív. Mivel eddig csak megfordítható átalakításokat végeztünk, ebben az esetben a kiindulási egyenlőtlenség is helyes, mégpedig az egyenlőtlenség jele áll fenn.

b) Ha pedig a bal oldal nem-negatív, akkor elég megmutatni, hogy a bal oldal négyzete nem nagyobb a jobb oldal négyzeténél:

$$(2a^2 - 2ac + b^2)^2 \leq 4a^2(a-c)^2 + 4a^2b^2 = (2a^2 - 2ac)^2 + 4a^2b^2. \tag{3}$$

A jobb oldal első tagját a bal oldalra áthozva és a két négyzet különbségét szorzattá alakítva:

$$b^2(4a^2 - 4ac + b^2) \leq 4a^2b^2,$$

végül minden tagot a jobb oldalra gyűjtve

$$0 \leq b^2(4ac - b^2). \tag{4}$$

Mivel itt az első tényező mindig, a második pedig a feltevés szerint nem-negatív, azért a szorzat valóban nem negatív, és mint láttuk, ebből következik az eredet egyenlőtlenség helyessége. Egyenlőség (4)-ben és ezzel együtt az előző egyenlőtlenségekben is csak a $b^2 = 0$, vagy a $4ac - b^2 = 0$ esetben lehetséges.

Ha azonban valamely a, b, c értékrendszerrel (4)-ben és így (3)-ban is egyenlőség teljesül, ebből visszafelé nem föltétlenül következik, hogy (2)-ben és így (1)-ben is egyenlőség áll fenn, mert (2) jobb oldala pozitív, a bal azonban nem föltétlenül. Így a fönt említett két esetben meg kell még vizsgálnunk, állhat-e – és ha igen, milyen feltételek mellett – (1)-ben egyenlőség.

$b = 0$ esetén (1) így alakul:

$$a + c - |a - c| \leq 2c,$$
$$a - c \leq |a - c|,$$

itt egyenlőség csak $a \geq c$ esetén áll fenn.

$4ac - b^2 = 0$ esetén (1) így alakul:

$$a + c - |a + c| \leq 0,$$
$$a + c \leq |a + c|,$$

itt csak $a + c \geq 0$ esetén áll fenn egyenlőség. Ez azonban mindig teljesül, mert $4ac = b^2 \geq 0$ és $a > 0$ folytán $c \geq 0$.

Mindezek szerint (1) a feltevések mellett mindig teljesül, egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha vagy

$$1) \quad b = 0 \quad \text{és} \quad a \geq c, \quad \text{vagy}$$
$$2) \quad 4ac - b^2 = 0.$$

Megjegyzések: 1. Többen a negatív oldalakat tartalmazó

$$-2a\sqrt{(a-c)^2 + b^2} \leq -(2a^2 - 2ac + b^2)$$

egyenlőtlenség gépies négyzetreemelésével a bizonyítandó egyenlőtlenségnek éppen az ellenkezőjét vélték „bizonyítani”. Ezek a versenyzők a négyzetre emeléskor hibáztak, mert hiszen pl. $-5 < 4$, és $-5 < -4$, de négyzetreemelés után már a $25 > 16$ egyenlőtlenség áll fenn.

2. Azokra az a, b, c értékrendszerekre, amelyekre (2) bal oldala negatív, az eredeti egyenlőtlenség $4ac - b^2$ előjelétől függetlenül teljesül. (Itt csak a pozitív voltát használtuk ki.)

Azokra az a, b, c értékrendszerekre, amelyekre (2) bal oldala nem-negatív, $4ac - b^2 \leq 0$ és $a > 0$ esetén az eredeti egyenlőtlenség fordítottja igaz; $a < 0$ és $4ac - b^2 \geq 0$ esetén az egyenlőtlenségnek szintén az ellenkezője igaz; és végül $a < 0$ és $4ac - b^2 \leq 0$ esetén az eredeti egyenlőtlenség igaz.

II. megoldás: Vonjuk ki a vizsgálandó egyenlőtlenség bal oldalát a jobb oldalból; átalakítás és összevonás után

$$\frac{4ac - b^2}{2a} - (a + c) + \sqrt{(a-c)^2 + b^2} =$$

(5)

$$= \sqrt{(a-c)^2 + b^2} - (a - c) - \frac{b^2}{2a} \geq 0.$$

Ebből egyszerűbb kifejezés adódik, ha megszorozzuk a

(6)
$$\sqrt{(a-c)^2 + b^2} + (a - c) + \frac{b^2}{2a}$$

értékkel. Ez a szorzó nem negatív, mert nagyobb vagy egyenlő, mint $|a - c| + (a - c)$, ami pedig nem negatív, és 0 is csak $b = 0$, $a \leq c$ esetben lesz, de ekkor (5) bal oldala $|a - c| - (a - c) = 2(c - a) \geq 0$, tehát a bizonyítandó állítás érvényes.

Ha (6) értéke pozitív, és megszorozzuk vele (5)-öt, akkor

(7)

$$\left(\sqrt{(a-c)^2 + b^2} - (a - c) - \frac{b^2}{2a}\right) \cdot \left(\sqrt{(a-c)^2 + b^2} + (a - c) + \frac{b^2}{2a}\right) =$$
$$= (a - c)^2 + b^2 - \left[(a - c) + \frac{b^2}{2a}\right]^2 = b^2 - \frac{b^2}{a}(a - c) - \frac{b^4}{4a^2} =$$
$$= \frac{b^2(4ac - b^2)}{4a^2} \geq 0.$$

Ebből következik az állítás helyessége. Az egyenlőség esetének vizsgálata ugyanúgy történhet, mint az I. megoldásban.

Megjegyzés: A (6) kifejezés átalakításából adódik, hogy

$$\sqrt{(a-c)^2 + b^2} + (a - c) + \frac{b^2}{2a} = \sqrt{(a+c)^2 - (4ac - b^2)} + (a + c) - \frac{4ac - b^2}{2a} \leq 2(a + c).$$

Ha a (7) bal oldalán (6) helyébe a nála nagyobb vagy egyenlő (pozitív) $2(a+c)$-t tesszük és átosztunk vele, azt kapjuk, hogy

$$\sqrt{(a-c)^2 + b^2} - (a - c) - \frac{b^2}{2a} \geq \frac{b^2(4ac - b^2)}{8a^2(a + c)},$$

és ebből további átalakítással

$$(8) \qquad (a+c)-\sqrt{(a-c)^2+b^2} \le \left(1-\frac{b^2}{4a(a+c)}\right)\cdot\frac{4ac-b^2}{2a}.$$

Ez a feladatban kitűzött állításnál erősebb állítás. Ugyanis a jobb oldal első tényezőjének értéke általában kisebb 1-nél.

III. megoldás: Az (1) egyenlőtlenség bal oldala nem negatív, mert

$$a+c-\sqrt{(a-c)^2+b^2} = a+c-\sqrt{(a+c)^2-(4ac-b^2)} \ge a+c-|a+c| = 0,$$

ugyanis a feltétel szerint $4ac-b^2 \ge 0$, és $a>0$, tehát $c \ge 0$, és így $a+c>0$.

Ha pozitív a bal oldal (vagyis ha $4ac-b^2 \ge 0$), akkor osszuk el vele mindkét oldalt. Ekkor azt kell megmutatni, hogy a mondott feltételek mellett

$$(9) \qquad A = \frac{\frac{4ac-b^2}{2a}}{a+c-\sqrt{(a-c)^2+b^2}} \ge 1.$$

Gyöktelenítsük a nevezőt:

$$A = \frac{(4ac-b^2)\left(a+c+\sqrt{(a-c)^2+b^2}\right)}{2a[(a+c)^2-(a-c)^2-b^2]} =$$

$$(10) \qquad = \frac{(4ac-b^2)\left(a+c+\sqrt{(a-c)^2+b^2}\right)}{2a(4ac-b^2)}.$$

Ha $4ac-b^2$-ről feltettük, hogy nem zérus, egyszerűsítve vele

$$A = \frac{a+c+\sqrt{(a-c)^2+b^2}}{2a} \ge \frac{a+c+|a-c|}{2a},$$

és itt ha *a)* $a \ge c$, akkor a jobb oldalon $2a/2a = 1$ áll,
ha pedig *b)* $a < c$, akkor a jobb oldal értéke $2c/2a > 1$,
tehát mindig $A \ge 1$.

Egyenlőség csak az *a)* esetben állhat, éspedig akkor és csak akkor, ha

$$\sqrt{(a-c)^2+b^2} = |a-c|, \quad \text{azaz ha} \quad b=0.$$

Ha viszont a $4ac-b^2$ kifejezés eltűnik, akkor, mint láttuk, az eredeti egyenlőtlenség bal oldala eltűnik, és eltűnik a jobb oldal is, tehát ez esetben is helyes az állítás, mégpedig egyenlőség áll fenn.

Megjegyzés: Míg az előző megoldásból egy élesebb felső becslést sikerült kapnunk, addig ebből a megoldásból (1) bal oldalára alsó becslést kaphatunk. Ha $4ac-b^2$ pozitív, akkor (10)-ben egyszerűsítve vele

$$A = \frac{a+c+\sqrt{(a-c)^2+b^2}}{2a} = \frac{a+c+\sqrt{(a+c)^2-(4ac-b^2)}}{2a}.$$

A tört értékét határozottan növeljük, ha a gyökjel alatti pozitív kivonandót elhagyjuk:

$$A < \frac{a+c+|a+c|}{2a} = \frac{2(a+c)}{2a} = \frac{a+c}{a}.$$

A értékét (9)-ből beírva és átszorozva kapjuk

$$\frac{4ac-b^2}{2a} < \left[a+c-\sqrt{(a-c)^2+b^2}\right]\cdot\frac{a+c}{a},$$

vagyis

$$(11) \qquad \frac{a}{a+c}\cdot\frac{4ac-b^2}{2a} < a+c-\sqrt{(a-c)^2+b^2}.$$

Ez akkor is teljesül, ha (1)-ben $b=0$ és $a \ge c$ folytán egyenlőség áll fenn; ha pedig $4ac-b^2=0$, akkor (11) is egyenlőségbe megy át, mert mindkét oldal értéke 0.

Így (9) és (11)-gyel (1) bal oldalát a következő korlátok közé szorítottuk:

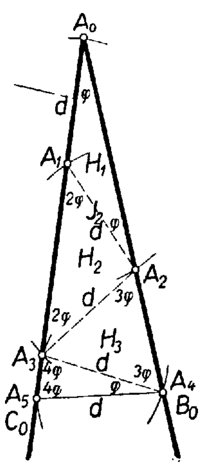
$$\frac{a}{a+c} \cdot \frac{4ac-b^2}{2a} \leq a+c-\sqrt{(a-c)^2+b^2} \leq \left(1-\frac{b^2}{4a(a+c)}\right) \cdot \frac{4ac-b^2}{2a}.$$

3. feladat: *Az ABC egyenlő szárú háromszögben a B csúcsnál fekvő szög n-szer akkora, mint az A csúcsnál fekvő szög, ahol n 1-nél nagyobb egész szám. Mutassuk meg, hogy lehet a háromszöget $n-1$ egyenes vágással úgy szétvágni n egyenlő szárú háromszögre, hogy valamennyi háromszög szárai egyenlők legyenek.*

Megoldás: Legyen a BAC szög nagysága φ, így az ABC szög $n\varphi$. Ezek különbözők, ezért a háromszög szárai vagy A-ban, vagy B-ben futnak össze. Az állítást a két esetre külön-külön bizonyítjuk.

I. eset: a szárak AB és AC, tehát a C csúcsnál levő szög nagysága $n\varphi$, a szögek összegéből $\varphi = 180°/(2n+1)$, ez hegyesszög, mert $2n+1 \geq 5$, és $n\varphi$ ugyancsak hegyesszög. – Elegendő egy olyan $A_0B_0C_0$ háromszöget adnunk, amely $n-1$ egyenes vágással n egyenlő szárú háromszögre bontható egyenlő hosszú szárakkal és hasonló az ABC háromszöghöz. Nyilvánvaló ugyanis, hogy az $A_0B_0C_0$-t ABC-be átvivő hasonlósági transzformációval valamennyi vágásszakasz megfelelőjét ABC-ben megszerkesztve és e háromszöget a kapott szakaszok mentén szétdarabolva ebből is n egyenlő szárú háromszög áll elő egyenlő hosszú szárakkal.

Egy a kívánt tulajdonsággal bíró $A_0B_0C_0$ háromszöget egy A_0 csúcsú, φ nagyságú szögből kiindulva a következő, $n+1$ lépésből álló és lépésenként 1–1 újabb segédpontot előállító szerkesztéssorozattal kaphatunk. A segédpontokat rendre A_1, A_2, $\ldots$, A_n, A_{n+1}-gyel jelöljük. Első lépésül A_0-ból egy tetszés szerinti $A_0A_1 = d$ szakaszt mérünk a szög egyik szárára (1. ábra, ezen $n=4$).

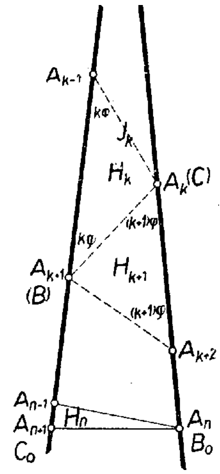


1. ábra

A 2. lépésben A_1 körül d sugárral kört írva A_2-ként vesszük e körnek a szög másik szárán levő, A_0-tól különböző metszéspontját. A további pontokat váltakozva a szög egyik és másik szárából metsszük ki az utoljára kapott pont körül d sugárral írt körívvel és mindig úgy, hogy azok a korábbi metszéspontoktól különbözők legyenek. Így A_3 gyanánt az A_2 körül d sugárral írt körnek a szög első, A_0A_1 szárán levő, A_1-től különböző metszéspontját vesszük. Az $n+1$-edik lépés után A_n-t B_0-nak, A_{n+1}-et C_0-nak véve előttünk áll a kívánt $A_0B_0C_0$ háromszög, és ezt az A_1-től A_n-ig terjedő egymás utáni $n-1$ segédpontpárt összekötő $n-1$ egyenlő szakasz darabolja fel a kívánt módon.

Mivel az A_0-nál levő φ szög hegyesszög, azért A_2 valóban a másik száron jön létre. Az $A_1A_0A_2 = H_1$ háromszög egyenlő szárú, így A_2-nél levő szöge is φ, tehát A_1-nél levő külső szöge $\varphi + \varphi = 2\varphi$. – Ez is hegyesszög, ezért A_3 az A_0-tól távolabb jön létre, mint A_1. Így az említett külső szög az $A_2A_1A_3 = H_2$ egyenlőszárú háromszögnek belső szöge, tehát H_2-nek A_3-nál levő szöge is 2φ, továbbá H_2 kívül áll H_1-en, A_1A_2 oldaluk közös, A_1-be befutó A_1A_3 és A_1A_0 oldalaik egymás meghosszabbításai, így együtt kitöltik az $A_0A_2A_3 = J_2$ háromszöget. Ezért az $A_1A_3A_2$ szög J_2-nek is szöge, ennélfogva J_2-nek A_2-nél levő külső szöge $\varphi + 2\varphi = 3\varphi$. – Ha $n > 2$, vagyis $n \geq 3$, akkor 3φ is hegyesszög, így A_4 távolabb van A_0-tól, mint A_2. Ezért az $A_3A_2A_4 = H_3$ egyenlő szárú háromszög kívülről csatlakozik J_2-höz és A_4-nél levő szöge is 3φ, egyenlő az utóbbi külső szöggel. Az $A_3A_4A_2$ szög a J_2 és H_3-ból összetevődő $A_0A_3A_4 = J_3$ háromszögnek is szöge, így J_3-nak A_3-nál levő külső szöge $\varphi + 3\varphi = 4\varphi$.

Teljes indukcióval minden $k \leq n$-re könnyű belátni, hogy az $A_kA_{k-1}A_{k+1} = H_k$ egyenlő szárú háromszögben $A_kA_{k-1}A_{k+1}\sphericalangle = A_kA_{k+1}A_{k-1}\sphericalangle = k\varphi$ (2. ábra).



2. ábra

Ennek helyességét $k=1,\ 2$-re és $n \geq 3$ mellett $k=3$-ra az előzőkben láttuk. Ha már most k olyan az n-nél kisebb szám, amelyre állításunk érvényes, akkor érvényes $k+1$-re is. Ugyanis $k<n$ folytán $k+1 \leq n$, és így a műveletsorozat még folytatódik. Az $A_0A_kA_{k+1}=J_k$ háromszög A_k-nál levő külső szöge $(k+1)\varphi \leq n\varphi < 90^\circ$, ezért az A_{k+1} körüli d sugarú körrel az A_0A_k szárból kimetszett A_{k+2} távolabb van A_0-tól, mint A_k, tehát az $A_{k+1}A_kA_{k+2}=H_{k+1}$ egyenlő szárú háromszög kívülről csatlakozik J_k-hoz. Így J_k-nak A_k-nál levő $(k+1)\varphi$ nagyságú külső szöge H_{k+1}-nek belső szöge, tehát $A_kA_{k+2}A_{k+1}\sphericalangle = A_{k+2}A_kA_{k+1}\sphericalangle = (k+1)\varphi$. Ezek szerint állításunk érvényessége valóban öröklődik minden az n-nél kisebb k-ról $k+1$-re.

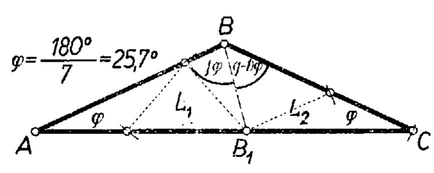
Tekintsük most már a $J_n = A_0A_nA_{n+1} = A_0B_0C_0$ háromszöget. Ebben a fentiek szerint $A_0C_0B_0\sphericalangle = A_0A_{n+1}A_n\sphericalangle = A_{n-1}A_{n+1}A_n\sphericalangle = n\varphi$, és ezért $A_0B_0C_0\sphericalangle = 180^\circ - \varphi - n\varphi = (2n+1)\varphi - (1+n)\varphi = n\varphi$. Így J_n egyenlő szárú, a szögek egyenlősége folytán hasonló az adott ABC háromszöghöz és maradéktalanul szétvágható a $H_1,\ H_2,\ \ldots,\ H_n$ egyenlő szárú háromszögekre. A szerkesztéssorozat első és utolsó lépése, az A_0A_1 és A_nA_{n+1} szakasz nem vágandó, tehát a vágások száma $(n+1)-2=n-1$. Mindezek szerint J_n-nek megvan a kívánt tulajdonsága. Ezt kellett megmutatnunk.

Továbbhaladás előtt vegyük észre, hogy az $A_0B_0C_0$ háromszögben $B_0C_0 = A_nA_{n+1} = d$. Ennek alapján megtakaríthatjuk a hasonlósági transzformációt: a fenti szerkesztéssorozatot az adott háromszögben A-ból kezdve és $d=BC$-vel végrehajtva azonnal a kívánt felbontást kapjuk. Így A_n és A_{n+1} kitűzése elmarad. A szerkesztéssorozatot fordított sorrendben, azaz B vagy C-ből kezdve is végrehajthatjuk, ilyenkor A_{n-1} az első szerkesztett pont.

Vegyük észre azt is, hogy szerkesztéssorozatunk első $k+1$ lépésével, ill. az $A_1A_2\ldots A_{k-1}A_k$ vágássorozat $k-1$ vágásával, az $A_0A_kA_{k+1}=J_k$ (nem egyenlő szárú) háromszöget is az előírt tulajdonságú háromszögekre daraboltuk (itt A_kA_{k+1} nem vágandó, mert J_k határának tekintjük). A felhasznált feltételeket áttekintve látjuk, hogy a következő általánosabb tételt bizonyítottuk be: Minden olyan ABC háromszög, melyben a B csúcsnál hegyes szög van és ez k-szor akkora, mint az A csúcsnál levő szög, – ahol k az 1-nél nagyobb egész szám, – szétvágható $k-1$ egyenes vágással k számú olyan egyenlő szárú háromszögre, hogy valamennyi rész-háromszög szárai egyenlők; a vágásszakaszok hossza a BC oldallal egyenlő. (Az első vágást célszerű C-ből indítani; de indulhat páros k esetén az AB oldal, páratlan k esetén az AC oldal azon A_1 pontjából is, melyre $AA_1 = BC$.

II. eset: a szárak BA és BC, a C-nél levő szög φ. Az állítást n párossága szerint két alesetben bizonyítjuk.

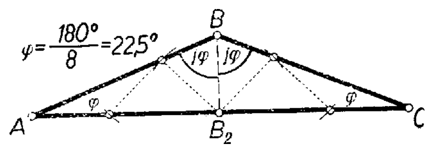
II/1. aleset: n páratlan. Legyen $n=2j-1$, ahol $j>1$, egész szám, így a szögek összegéből $\varphi = 180^\circ/(2j+1)$. A bizonyítást visszavezethetjük az I. esetre. Mérjük fel az AB szárat A-tól az AC alapra (3. ábra).



3. ábra

Az előálló B_1 végpont az AC szakaszon van, mert $n\varphi > \varphi$ folytán $AC > AB$. A háromszöget BB_1 mentén kettévágva az $ABB_1 = L_1$ és $CBB_1 = L_2$ háromszögekre már alkalmazhatjuk a fenti általános tételt. Ugyanis L_1 egyenlő szárú, és a BB_1 alapon levő szögeinek nagysága $(180^\circ - \varphi)/2 = (2j+1-1)\varphi/2 = j\varphi = j \cdot pBAB_1\sphericalangle$. Ennélfogva L_2-ben $CBB_1\sphericalangle = CBA\sphericalangle - B_1BA\sphericalangle = (2j-1)\varphi - j\varphi = (j-1)\varphi = (j-1)\cdot BCB_1\sphericalangle$. Továbbá a B-nél levő részszögek hegyesszögek, mert az ABB_1 szög egy egyenlő szárú háromszögnek alapon levő szöge, a $CBB_1\sphericalangle = (j-1)\varphi$ pedig kisebb $ABB_1\sphericalangle = j\varphi$-nél. A vágásszakasz hossza L_1 és L_2-ben egyaránt BB_1, mint az A, ill. C-nél levő φ szöggel szemben fekvő oldal. A vágások száma $1+(j-1)+(j-2) = 2j-2 = n-1$, a létrejövő háromszögek száma pedig $j+(j-1) = 2j-1 = n$, amint bizonyítanunk kellett.

II/2. aleset: n páros: $n = 2j$, ahol $j \geq 1$, egész szám. Vágjuk ketté az ABC háromszöget a B csúcsból induló BB_2 magasságvonallal (4. ábra).



4. ábra

A létrejött egybevágó ABB_2 és CBB_2 derékszögű háromszögek B-nél levő szögei hegyesszögek és $n/2 = j$-szer akkorák, mint az A, ill. C-nél fekvő szögek. Így a két rész-háromszög a fenti tétel szerint az előírásnak megfelelően feldarabolható (ill. $j = 1$, azaz $n = 2$ esetén már fel is van darabolva), tehát az eredeti háromszög is. A vágásszakaszok hossza BB_2, a vágások száma az egész háromszögben $1+2(j-1) = 2j-1 = n-1$, és az egyenlő szárú rész-háromszögek száma $2j = n$ az állításnak megfelelően. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Megjegyzés. A feldarabolhatóság bizonyításában az I. esetben a B-nél levő $n\varphi$, szög csúcsából kiinduló vágással is kezdhettük volna vágási sorozatunkat. Így be kellett volna bizonyítanunk, hogy az utolsó vágás utáni maradék-háromszög ugyancsak egyenlő szárú.