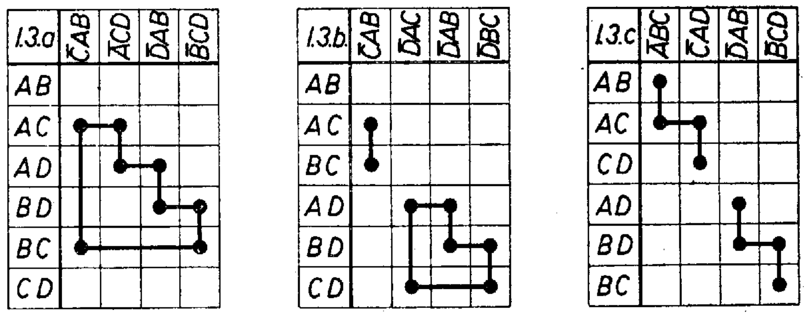
[1] Alább bemutatunk egy más természetű bizonyítást arra, hogy az 596. gyakorlat megoldása I. 3. pontjában felsorolt *a), b), c)* rendszereken kívül nincs más 4 pontból álló síkbeli pontrendszer. (Az egyenlő oldalú háromszögekre nem leszünk tekintettel.) – Készítsünk táblázatot a mondott három rendszerről úgy, hogy mindegyik szakaszuk részére egy sort és mindegyik háromszögük részére egy oszlopot nyitunk, és ebben a háromszögek és száraik közti kapcsolatot úgy tüntetjük fel, hogy pl. az $AB\overline{C}$ háromszög oszlopa és a CA, CB szárak sora közös mezejére egy jelet teszünk, elég pl. egy pontot. Jellegzetesebbé válnak e táblázatok, ha a berajzolt pontok ugyanazon sorba, ugyanazon oszlopba eső párjait egyenes szakaszokkal összekötjük; ezeket az összekötéseket a továbbiakban fel is használjuk (1. ábra).



1. ábra

Így ugyancsak pontokból álló, de az eredeti pontrendszerektől különböző, újfajta szemléletes képet kaptunk az egyenlő szakaszok számáról és eloszlásáról. Nevezzük a kapott vonalrendszereket az eredeti ábrák *sémái*nak. Ha a séma vonalai mentén pontról pontra haladunk, akkor az eredeti pontrendszer azon szakaszairól tudjuk, hogy egyenlők, amelyek soraiba így egymásból eljuthatunk.

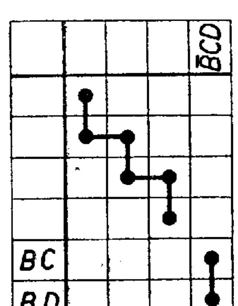
Ha volna az I. 3-ban látottakon kívül további ilyen pontrendszer, nyilván ahhoz is lehetne hasonló sémát készíteni. Kérdezhetjük tehát, lehetséges-e további ilyen séma? Tisztázzuk evégett, hogy megfordítva milyen sémákhoz tudunk pontrendszert szerkeszteni.

Minden séma 8 pontból áll legfeljebb 6 sorba és pontosan 4 oszlopba rendezve; oszloponként 1 pontpár, tehát oszloponként pontosan egy összekötés van. E pontpárok csak olyan sorpárokban állhatnak, amelyekhez tartozó szakaszoknak egyik végpontjuk közös. Így ha a táblázat soraiba a pontrendszer szakaszai be vannak írva, ebből megállapíthatjuk az oszlopok háromszögeit. Ha pl. 2 egymás fölötti pont a BC és BD szakaszok sorában áll, akkor oszlopunk a $\overline{B}CD$ háromszöghöz tartozik. Eszerint 2 oszlop 4 pontja nem adhatja egy téglalap csúcsait, különben ugyanis a 2 oszlophoz ugyanaz a háromszög tartoznék.

Soronként legfeljebb 2 pont áll, mert a pontrendszer minden szakasza csak 2 háromszögnek oldala, – de nem is mindig szára. Így soronként legfeljebb 1 összekötés van, továbbá a 8 pont legalább $8 : 2 = 4$ sorra oszlik el. Ezek szerint a séma minden pontja legfeljebb 2 ponttal lehet összekötve.

Sémáink 1 vagy 2 összefüggő részből állnak, ezeket zártnak vagy nyitottnak mondjuk aszerint, hogy nincs, ill. van végpontjuk. Nyitott sémarésznek a végpontokba befutó összekötései „függőlegesek", mert oszlopbeli összekötése minden sémapontnak van. Ezért nyitott sémarész összekötéseinek száma páratlan, mert a kötések váltakozva függőlegesek és „vízszintesek"; másrészt az összekötések száma 1-gyel kevesebb, mint a sémarész pontjainak száma. Hasonlóan zárt sémarészben az összekötések száma páros, éspedig ugyanannyi, mint a sémarész pontjainak száma. Láttuk, hogy sémarész nem lehet téglalap, tehát zárt sémarész legalább 6 összekötést tartalmaz.

Keressük most már azokat a számunkra értelmezhető sémákat, melyek pontjai 6 sorból valók. Ezekben $8 - 6 = 2$ sorra jut 1–1 „többletpont", tehát 2 vízszintes összekötést tartalmaznak, bennük az összekötések összes száma $4+2 = 6$. Így 2 nyitott részből állnak, mert az összekötések száma a pontokéhoz képest $8 - 6 = 2$ hiányt mutat. Ilyen az I. 3. *c)* séma két 3-tagú résszel, de elképzelhető a 2. ábra sémája is, melyen a részek összekötéseinek száma 1 és 5.

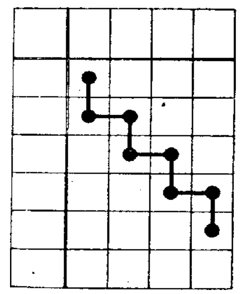


2. ábra

[1]Lásd a megoldást K. M. L. XXI. (1960), 66. o.

– Tartozik-e ehhez pontrendszer? Az 1-tagú rész két pontja tartozzék pl. a $\overline{B}CD$ háromszöghöz, másképpen a BC, BD szakaszpárhoz. Így az 5-tagú rész összekötései folytán a 4 további szakasz egyenlő: $AB = AC = CD = DA$, tehát az ACD háromszög egyenlő oldalú és A a $\overline{B}CD$ háromszög köré írt kör középpontja. Ezek szerint az új sémához tartozik pontrendszer, de ez nem új, hanem a többlet-egyenlőségeket mutató I. 3. *b')*.

Ha a séma 8 pontja 5 sorra oszlik el, akkor $8 - 5 = 3$ sorra jut 1–1 többletpont, az összekötések száma $3 + 4 = 7$. Ha feltesszük, hogy van zárt rész, az I. 3. *b)*-re jutunk, ha pedig nincs, akkor az ugyancsak ismert I. 3. a') rendszerre, mert a 3. ábra szerint 5 szakasz egyenlő.



3. ábra

Még be kell azonban látnunk, hogy a I. 3. *b)* séma mellől a betűzést törölve azt lényegében csak egyféleképpen lehet visszaállítani. Valóban, a 4. és 6. sort AD, ill. CD sorának véve a zárt sémarész alapján a 2. oszlop egyértelműen a $\overline{D}AC$ háromszögé, ennélfogva a 3. oszlop csak az ADB háromszögé lehet, mert AD másodszor ebben lép fel, a 4. oszlop pedig ugyanígy csak a CDB háromszögé. Így az 5. sor ADB és CDB-nek közös BD szakaszához tartozik, tehát $AD = BD = CD$, vagyis A, B, C egy a D körül írt körön vannak. Az ABC háromszög egyenlő szárú mivoltát a séma 1 tagú része biztosítja, bármelyik csúcs lehet a főcsúcs.

Hasonlóan látható be, hogy a séma 8 pontját 4 sorba rendelve $4 + 4 = 8$ összekötés van, így sem nyitott sémarész nem lehet, sem több darabból nem állhat a séma, végül a betűzés is – két sor szakaszának megválasztása után – egyértelműen meghatározható, tehát nem kapunk új pontrendszert.

Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Elvileg $n \geq 5$ esetére is szerkeszthetünk sémákat, ezek azonban egyre bonyolultabbak