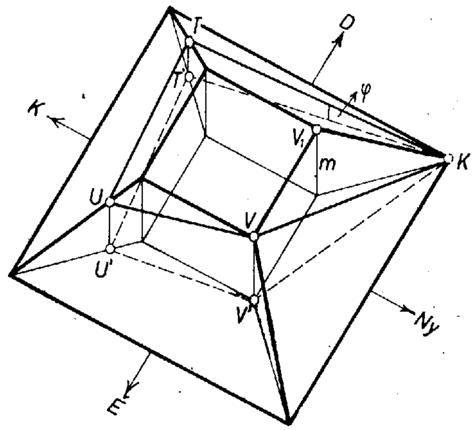
Legyen a két út közös kezdő- és végpontja K és V, a II. út töréspontjai a hegy délkelet és északkelet felé mutató élén T és U, ezeknek, valamint a hegyet teljes gúlává kiegészítő gúla C csúcsának az alapon levő vetülete rendre V', T', U', C', a hegy magassága $V'V = m$, végül a II. út emelkedési szöge φ (1. ábra).



1. ábra

A magasságot az utak méreteivel kétféleképpen kifejezve

$$m = V'V = KV' \operatorname{tg}(\varphi + 16{,}7^\circ) = (KT' + T'U' + U'V') \operatorname{tg}\varphi \tag{1}$$

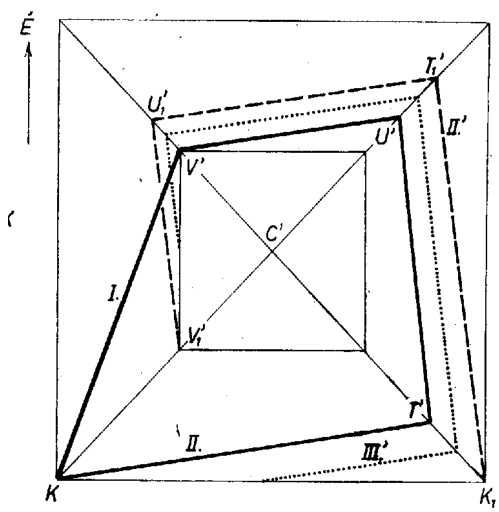
és itt nyilvánvalóan

$$KV'^2 = \left(\frac{320 - 135}{2}\right)^2 + \left(\frac{320 + 135}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(320^2 + 135^2\right).$$

Alább belátjuk, hogy a KT', $T'U'$, $U'V'$ vetületszakaszok szomszédos páronként merőlegesek egymásra. Eszerint a $C'KT'$, $C'T'U'$, $C'U'V'$ derékszögű háromszögek hasonlók (2. ábra):

$$\frac{C'T'}{C'K} = \frac{C'U'}{C'T'} = \frac{C'V'}{C'U'} = q, \qquad \frac{C'V'}{C'K} = q^3,$$
$$q = \sqrt[3]{\frac{C'V'}{C'K}} = \sqrt[3]{\frac{135}{320}} = \frac{3}{4},$$

hiszen két négyzetben az átlók aránya egyenlő az oldalak arányával.



2. ábra

Így (méterben)

$$C'K = 160\sqrt{2}, \qquad C'T' = 120\sqrt{2}, \qquad C'U' = 90\sqrt{2}, \qquad C'V' = 67{,}5\sqrt{2},$$

ezekből

$$KT' = 200\sqrt{2}, \qquad T'U' = 150\sqrt{2}, \qquad U'V' = 112{,}5\sqrt{2},$$

és az (1) jobb oldalán álló zárójel értéke: $A=462{,}5\sqrt{2}$.

Legyen még $\operatorname{tg} 16{,}7^\circ = t(=0{,}3000)$, így (1)-ből

$$KV'\cdot\frac{t+\operatorname{tg}\varphi}{1-t\operatorname{tg}\varphi}=A\ \operatorname{tg}\varphi,$$
$$At\cdot\operatorname{tg}^2\varphi-(A-KV')\ \operatorname{tg}\varphi+KV'\cdot t=0,$$

amiből $\operatorname{tg}\varphi$-re két pozitív érték adódik. Tovább pedig – ismét (1) alapján

$$m_{1,2}=A\ \operatorname{tg}\varphi=\frac{1}{2t}\left\{A-KV'\pm\sqrt{(A-KV')^2-4A\cdot KV'\cdot t^2}\right\},$$

tehát a hegy magassága lehet $m_1=130{,}5$, és $m_2=1231$ méter, a megfelelő szögek a II. és I. útra

$$11{,}3^\circ \text{ és } 28{,}0^\circ,\quad \text{ill.}\quad 62{,}0^\circ \text{ és } 78{,}7^\circ.$$

Az utóbbi kettő rendkívüli meredekség, valószínűbb a magasság 130,5 méteres értéke. (A hegyoldalak lejtése még így is 54,7°.)

Visszatérve a felhasznált állításra, nyilvánvaló, hogy a déli lejtő a C-n átmenő függőleges egyenes körül 90°-kal elfordítva a keleti lejtő helyére jut. Legyen a KT szakasz új helyzete K_1T_1. Ennek emelkedési szöge ugyancsak φ, és ekkora szöget zár be a vízszintessel a keleti lejtőnek minden vele párhuzamos egyenese, ami pedig nem párhuzamos vele (és észak felé emelkedik), annak emelkedési szöge φ-nél nagyobb vagy kisebb. Így $T'U'$ párhuzamos K_1T_1 vetületével, ez viszont merőleges KT'-re.

A III. útvonal kérdése könnyebb lesz, ha két segédútvonalat tekintünk: felvezetjük az előbbi K_1T_1 folytatását, $K_1T_1U_1V_1=\mathrm{II}'$-t, ami nyilvánvalóan a tetőfennsík délnyugati csúcsára érkezik, másik segédútvonalunk pedig a déli oldal közepéből indul a keleti oldal felé, ugyanakkora emelkedéssel, mint III, vagyis mint II és II'. igy az előzők szerint III' első szakasza a KK_1T háromszög KT-vel párhuzamos középvonala, tehát K_1T felezőpontjában lesz az első törése, tovább a K_1T_1UT, majd a T_1U_1VU trapéz középvonalán halad, tehát harmadik töréspontja felezi U_1V-t, végül az U_1V_1V háromszögnek az U_1V_1 oldallal párhuzamos középvonalán haladva a VV_1 nyugati oldal felezőpontjába érkezik fel.

Így a kívánt III. útvonal felső végpontja – ismét 90°-os elfordítással – a fennsík déli oldalának felezőpontja.

Gegesy Ferenc (Budapest, Móricz Zs. Gimn., IV. o. t.)
Simon Júlia (Győr, Kazinczy F. Gimn., III. o. t.)