1. feladat: *k-nak mely pozitív egész értékei mellett lesz a*

$$N = 3^{6n-1} - k \cdot 2^{3n-2} + 1$$

kifejezés n minden pozitív egész értékére osztható 7-tel?

Megoldás: Ha N valamilyen k érték mellett minden n-re osztható 7-tel, akkor $n = 1$-re is osztható, tehát

$$3^5 - 2k + 1 = 244 - 2k = 7m. \qquad (1)$$

Itt a bal oldal páros, tehát a jobbnak is párosnak kell lennie. Ez akkor és csak akkor áll fenn, ha m páros: $m = 2m_1$. Így k-ra azt kapjuk, hogy

$$k = 122 - 7m_1 = 7(17 - m_1) + 3 = 7m_2 + 3.$$

Itt m_2 tetszés szerinti egész értéke mellett fennáll (1) az $m = 34 - 2m_2$ értékkel.

Megmutatjuk másfelől, hogy N minden n-re 7-tel osztható számmal tér el az $n = 1$-hez tartozó értéktől. Valóban

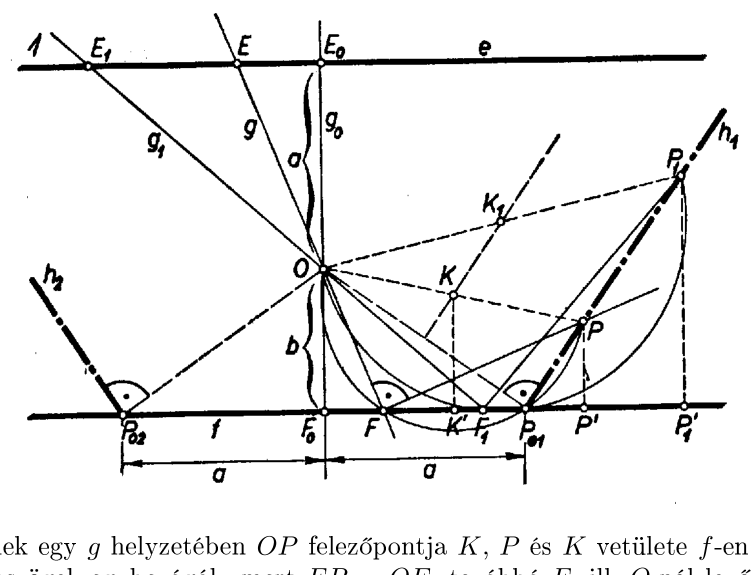
$$N - (3^5 - 2k + 1) = 3^5(3^{6(n-1)} - 1) - 2k(2^{3(n-1)} - 1),$$

és a jobb oldal első különbsége osztható $3^6 - 1 = (3^3 - 1)(3^3 + 1) = 26 \cdot 28$-cal, tehát 7-tel is, a második tag pedig osztható $2^3 - 1 = 7$-tel, így az egész különbség is.

Azt kaptuk tehát, hogy N akkor és csak akkor osztható minden n-re 7-tel, ha ez az $n = 1$-hez tartozó értékére teljesül, ehhez pedig szükséges és elegendő is, hogy k 7-tel osztva 3-at adjon maradékul.

2. feladat: *Adva vannak az e, f párhuzamos egyenesek és köztük az O pont; O távolsága e-től a, f-től b. Az O-n áthúzott g egyenes e-t E-ben, f-et F-ben metszi. F-ben merőlegest állítunk g-re, és erre az e-vel való metszéspontja irányában felmérjük az OE szakaszt, ennek végpontja P. Mi a P pont mértani helye, ha g az O körül forog?*

I. megoldás: Legyen g-nek az f-re merőleges helyzete g_0, ennek metszéspontjai e, f-en E_0, F_0. Ekkor a kérdéses merőleges maga f, így az e-vel való metszéspont nem létezik, P nem szerkeszthető egyértelműen; azonban f-nek F_0-tól $OE_0 = a$ távolságra fekvő P_{01} és P_{02} pontjait tágabb értelemben a mértani helyhez tartozóknak tekinthetjük. – Elegendő g-nek azon helyzeteivel foglalkoznunk, amelyek f-et az F_0P_{01} félegyenesén metszik, mert a mértani helynek az így mellőzött pontjait a figyelembe vettekből g_0-ra való tükrözéssel megkaphatjuk, hiszen g minden mellőzött helyzetének megvan a tükörképe a figyelembe vett helyzetek között.



Legyen a forgó egyenesnek egy g helyzetében OP felezőpontja K, P és K vetülete f-en P', K'. Ekkor az FPP' és OEE_0 derékszögű háromszögek egybevágók, mert $FP = OE$, továbbá F, ill. O-nál levő szögeik merőleges szárú hegyes szögek, és ezért egyenlők. Így $FP' = OE_0 = a = F_0P_{01}$ és F a P'-től ellentétes irányban van, mint P_{01} az F_0-tól (ugyanis az F_0FP szög nagyobb az OFP szögnél, ez pedig derékszög). Ezért P_{01} és F tükrös párok az F_0P' szakasz felező merőlegesére – ami egyben az $OF_0P'P$ trapéz KK' középvonala –, és így $KP_{01} = KF$. Másrészt K az OFP derékszögű háromszög köré írt kör középpontja. Ezek szerint e kör átmegy P_{01}-en és ezért az $OP_{01}P$ szög (g bármely helyzete mellett) derékszög; más szóval P csak a P_{01}-ben OP_{01}-re állított merőlegesen fekhet. Tegyük hozzá: az FP szakaszok felmérési irányára tekintettel P a merőlegesnek csak azon a h_1 félegyenesén lehet, amely f-nek ugyanazon partján van, mint e (és O).

Megmutatjuk, hogy a figyelembe vett g helyzetekre a keresett mértani hely éppen h_1, vagyis h_1 bármely P_{01}-től különböző P_1 pontja előáll g valamely helyzetéből.

g_1-nek a P_1-et előállító helyzetére, ill. a vele adódó E_1, F_1-re egyrészt a P_1F_1O szögnek derékszögnek, másrészt $F_1P_1 = OE_1$-nek kell lennie. Az első követelményből g_1 egyértelműen megszerkeszthető, ehhez F_1-et az OP_1 átmérőjű (és $P_1P_{01}O\sphericalangle = 90°$ folytán P_{01}-en átmenő) Thalész-körnek f-fel való, P_{01}-től különböző metszéspontja adja

– amennyiben két ilyen metszéspont van –, és $F_1 \equiv P_{01}$, ha e kör érinti f-et. E kör K_1 középpontja rajta van az F_0P_1' szakasz felező merőlegesén (P_1' a P_1 vetülete f-en), így F_1 és P_{01} tükrös pontpár F_0P_1' felezőpontjára, és ezért $F_1P_1' = F_0P_{01} = OE_0$. Így az OE_1E_0 és $F_1P_1P_1'$ derékszögű háromszögek egybevágók (E_1 a g_1 és e metszéspontja), mert O, ill. F_1-nél fekvő szögük szárai páronként merőlegesek (Thalész-kör), ennélfogva $OE_1 = F_1P_1$ amit bizonyítani akartunk. (Teljesség kedvéért megjegyezzük, hogy F_1 az F_0P_{01} félegyenesen van, mert nem lehet sem F_0-ban, sem az F_0P_{02}, félegyenesen; ugyanis F_0 a körre nézve külső pont, K_1 az OP_0 szakasz felező merőlegesének azon a félegyenesén van, amely OP_{01}-nek F_0-val ellentétes oldalára esik, az utóbbinak pontjai pedig F_0-tól távolabb vannak, mint P_{01}-től.)

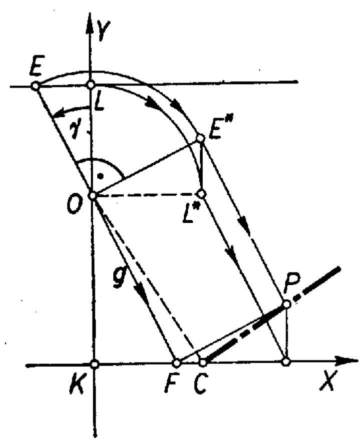
Ezek szerint a keresett mértani helyet h_1 és ennek g_0-ra való h_2 tükörképe adja, vagyis az f egyenes $F_0P_{01} = F_0P_{02} = OE_0$ tulajdonságú P_{01}, P_{02} pontjaiban OP_{01}, ill. OP_{02}-re állított merőlegeseknek azok a félegyenesei, amelyek f-nek O-t tartalmazó partján vannak. P_{01} és P_{02} a mértani helynek csupán tágabb értelemben vett pontjai.

Megjegyzések. 1. $FP' = F_0P_{01}$ megállapítása után – ahol a szakaszok iránya is megegyező –, vizsgálatunkat így is befejezhetjük: eszerint $P_{01}P' = F_0F$, másrészt $PP' = EE_0$, ennélfogva $PP' : P_{01}P' = EE_0 : F_0F = OE_0 : OF_0 = a : b$, azaz állandó, tehát bármely P-be P_{01}-ből ugyanaz az irány mutat. Így azonban még hátra van ennek az iránynak a meghatározása.

2. Többen pontos rajzú próbák nélkül azt a pusztán szabadkézi vázlatra alapított sejtésüket próbálták igazolni, hogy a mértani hely kör, hiperbola, hiányos parabola, vagy két kotangens-görbe.

A versenyzők nagyobb része a koordináta-geometria módszereivel kereste a mértani hely egyenletét, gyakran elég bonyolult számításokkal, a szakaszfelmérést egyenes és kör metszésének tekintve, ami két lehetőséget ad P-re, a helyes irány megválasztása pedig diszkussziót igényel. Alább egy ezt a lépést kikerülő, részben koordináta-geometriai megoldást adunk.

II. megoldás: Válasszuk f-et X-, és a rá O-n át húzott merőlegest Y-tengelynek úgy, hogy O ordinátája b legyen, és legyen a kezdőpont K, továbbá e és az Y-tengely metszéspontja L. Tekintsük egyelőre azokat a g-ket, amelyek az X-tengelyt pozitív abszcisszájú F-ben metszik, és jellemezzük g helyzetét azzal a γ pozitív hegyes szöggel, amellyel O körül az Y-tengelyhez képest el van fordulva. Így F, E koordinátái: $(b \operatorname{tg} \gamma, 0)$, $(-a \operatorname{tg} \gamma, b+a)$ és a felmérendő $OE = z$ szakasznak az Y-tengelyre való vetülete a, az X-tengely irányára pedig $LE = -a \operatorname{tg} \gamma$.



E szakasz előírt felmérését helyettesíthetjük O körüli $-90°$-os elforgatásával és O-nak F-be való eltolásával.

Így az elforgatott OE^* vetületei X, Y irányára $OL^* = a$, $L^*E^* = a \operatorname{tg} \gamma$, és az eltolás után P koordinátái: $x = b \operatorname{tg} \gamma + a$, $y = a \operatorname{tg} \gamma$. ($f$, e pontjainak ordinátája 0, ill. $b + a > 0$, ennélfogva OE-nek e felé való felmérése P-re pozitív ordinátát ír elő; valóban $y > 0$, mert $\gamma > 0°$.

A keresett mértani hely eddig tekintetbe vett részének egyenletét P koordinátáiból a γ paraméter kiküszöbölésével kapjuk:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{x-a}{b} = \frac{y}{a}\text{-ból}: \ y = \frac{a}{b}(x-a),$$

és ehhez járul $\operatorname{tg} \gamma > 0$ helyett az $y/a > 0$, azaz $y > 0$ megszorítás. Ez félegyenes egyenlete, amely az X tengelyt az $x = a$ abszcisszájú C pontban metszi (itt a kezdőpontja) és amely merőleges OC-re, mert OC iránytangense $-b/a$.

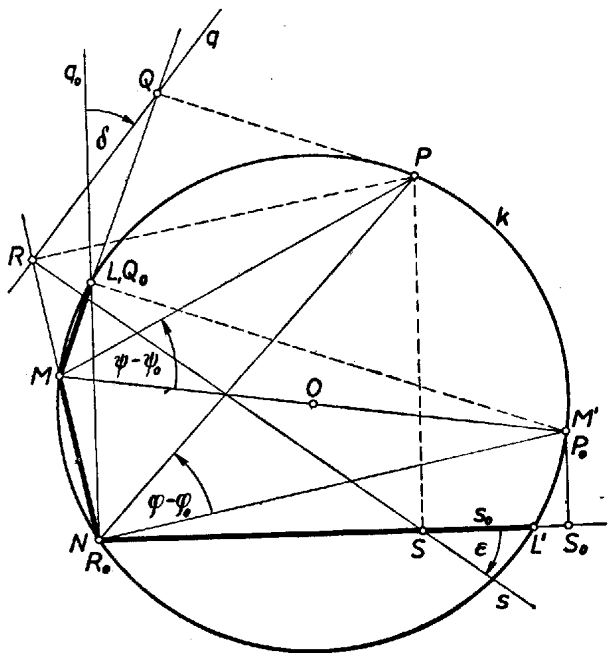
Hasonlóan kapjuk az X-tengelyt negatív abszcisszájú F-ben metsző g egyenesekre $F(-b \operatorname{tg} \gamma, 0)$ és $E(a \operatorname{tg} \gamma, b + a)$-ból P-re: $x = -b \operatorname{tg} \gamma - a$, $y = a \operatorname{tg} \gamma$ (itt γ a g elfordulása Y-tól a negatív forgási irányban). Eszerint P abszcisszája az előbbinek -1-szerese, ordinátája változatlan, ez az Y-tengelyre való tükrözést jelent, ennélfogva a mértani hely hiányzó része az eddigiből az f-re O-n át húzott merőlegesen való tükrözéssel áll elő.

Megjegyzések. 1. A fentiekben nem „tiszta” koordinátageometriai módszerrel dolgoztunk, több lépést elemi, ill. trigonometriai úton végeztünk.

2. OE-nek a g-re merőlegesen való felmérésével adódó pontot megkaphatjuk a merőleges és a g-ből (rá merőleges) OE nagyságú eltolással előálló g' egyenes metszéspontjaként is. Így azonban mindegyik említett egyenes egyenletét fel kellene írnunk, és többet kellene számolnunk. Az „e felé” való eltolás révén a g'-vel az Y-ból lemetszett szakasz b-ről $b + OE/\sin \gamma = b + a/\sin \gamma \cos \gamma$-ra növekszik.

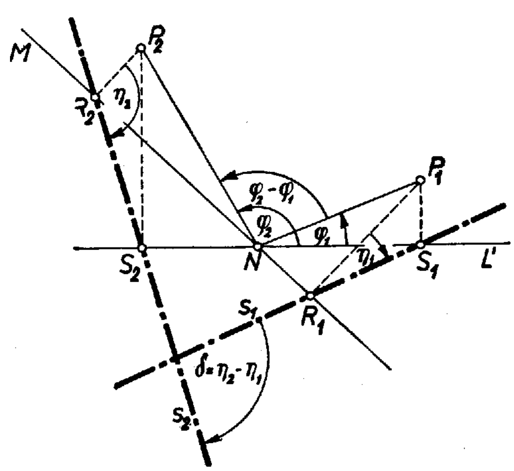
3. feladat: *Egy $ABCA'B'C'$ konvex hatszög csúcsai egy kör AA', BB', CC' átmérőinek végpontjai, és P a körnek a hatszög csúcsaitól különböző pontja. Legyenek P-ből az AB, BC, CA', $A'B'$, $B'C'$, $C'A$ oldalra bocsátott merőlegesek talppontjai rendre Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6. Bizonyítandó, hogy a $Q_1Q_2Q_3Q_4Q_5Q_6$ hatszögnek bármelyik két egymás utáni oldala derékszöget alkot, továbbá, hogy a Q_1Q_4 Q_2Q_5, Q_3Q_6 szakaszok felező pontjai és P egy körön fekszenek.*

I. megoldás: A $Q_1Q_2Q_3Q_4Q_5Q_6 = H_2$ hatszög bármelyik két egymás utáni oldalát – három egymás utáni csúcsát – az $ABCA'B'C' = H_1$ hatszög három egymás utáni oldala – négy egymás utáni csúcsa – határozza meg; és az első és a negyedik csúcs egy átmérőnek két végpontja.



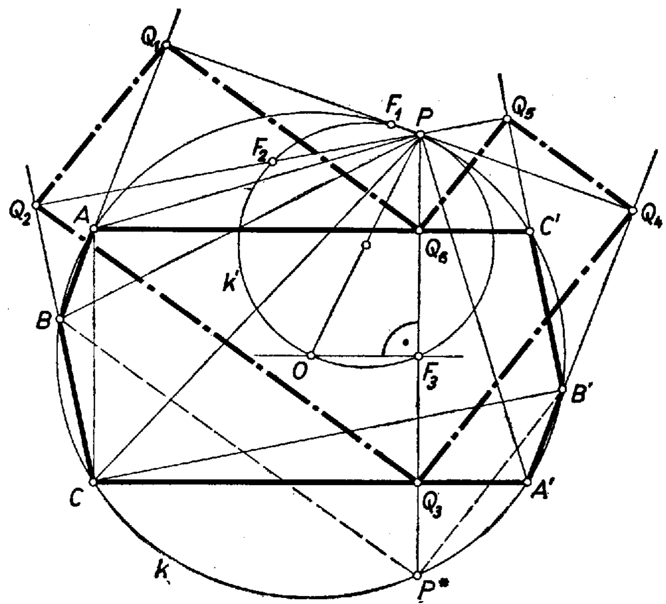
Ezért az állítás első részében elég azt bizonyítanunk, hogy ha L, M, N, L' ebben a sorrendben egy k körnek egymástól különböző pontjai, LL' a k-ban átmérő, és egy a k-n fekvő P-ből az LM, MN, NL' egyenesekre bocsátott merőlegesek talppontjai rendre Q, R, S, akkor $QR = q$ és $RS = s$ egymásra merőlegesek. Evégett megmutatjuk egyrészt, hogy P egy bizonyos P_0 helyzetében $Q_0R_0 = q_0$ és $R_0S_0 = s_0$ merőlegesek, másrészt hogy ha P elmozdul a k-n, akkor $QR = q$ és $RS = s$ egymással megegyező irányban ugyanakkora szöggel fordulnak el. (L, M, N és L' sorrendje megfelel H_1 konvexségének.)

Valóban, P_0-ként az M-en átmenő átmérőnek M' másik végpontját véve Q_0 az L-be, R_0 az N-be esik, így $Q_0R_0S_0\sphericalangle = LNS_0\sphericalangle = LNL'\sphericalangle$, és ez a feltevésnél fogva derékszög.



Legyen η az s (előjellel vett) hajlásszöge PR-nek attól a félegyenesétől mérve, amely MN-nek ugyanazon partján van, mint L. Az N, P, R, S pontok P bármely helyzetében húrnégyszöget határoznak meg, ebből látható, hogy η mindig egyenlő a $\varphi = L'NP$ szöggel, de avval ellentétes irányú: $\eta = -\varphi$. Eszerint ha P a P_1 helyzetből P_2-be megy át, akkor a megfelelő s_1-nek s_2-be való δ elfordulási szögét P_1R_1 és P_2R_2 párhuzamossága folytán az $\eta_2 - \eta_1$ különbség adja, és erre $\delta = \eta_2 - \eta_1 = -(\varphi_2 - \varphi_1)$, vagyis s elfordulása egyenlő, de ellentétes irányú NP elfordulásával. (Ez nem a k-n fekvő P-re is érvényes.) – Eredményünk alapján egy P_2-ből szerkesztett q_2-nek egy P_1-ből szerkesztett q_1-hez képest való ε elfordulási szöge is kiadódik: $-(\psi_2 - \psi_1)$, ahol ψ_1 és ψ_2 a $\psi = NMP$ szög megfelelő két értékét jelöli. –

Most már P két helyzetének k-n P_0-t és P-t véve $\psi-\psi_0=P_0MP\sphericalangle=P_0NP\sphericalangle=\varphi-\varphi_0$, eszerint $\varepsilon=\delta$, vagyis q, s a q_0, s_0-hoz képest valóban ugyanannyival és ugyanazon irányban fordulnak el, és ezért $SRQ\sphericalangle=S_0R_0Q_0\sphericalangle$, derékszög, amit bizonyítani akartunk.



H_1 mindegyik szemben fekvő oldalpárja egymással párhuzamos, mert végpontjaik, mint két átmérő végpontjai, egy téglalapnak a csúcsai; ezért a P-ből rájuk bocsátott merőlegesek azonosak, így pl. a P, Q_3, Q_6 ponthármas egy egyenesbe esik. Ezért a Q_3Q_6 szakasz F_3 felezőpontja egyrészt PQ_3-on fekszik, másrészt az $ACA'C'$ téglalapnak az AC-re merőleges tengelyén, amely k-nak átmérője, tehát F_3-ból az OP sugár derékszögben látszik, F_3 az OP átmérőjű k' Thalész-körnek pontja. (Az utóbbi akkor is áll, ha F_3 éppen P-be esik.) Ugyanez áll a Q_1Q_4, Q_2Q_5 szakaszok F_1, F_2 felezőpontjára. Ezzel bebizonyítottuk az állítás második részét, és egyben a szóban forgó második kört közvetlen kapcsolatba hoztuk k-val és P-vel.

II. megoldás: A H_1 hatszög oldalainak merőlegességét a következőképpen is igazolhatjuk. Elegendő P-nek a $C'A$ íven felvehető helyzeteire szorítkozunk mert H_1-nek nincs kitüntetett oldala, így a betűzés megváltoztatásával mindig elérhetjük az említett helyzetet. Másrészt elég az egymást Q_6, Q_1, Q_2, Q_3-ban metsző oldalakra megmutatni, hogy merőlegesek egymásra, mert H_1 csúcsait fordított sorrendben betűzve (A, B, $\ldots$, C' helyére rendre C', B', $\ldots$, A-t írva) Q_5 és Q_1 valamint Q_4 és Q_2 felcserélődnek.

Q_1 mint a PAB háromszög magasság talppontja az AB oldal A-n túli meghosszabbításán van, mert a PAB szög tompaszög, szárai között k-nak a C' és C pontokat tartalmazó, és ezért félkörnél nagyobb PB íve fekszik; hasonlóan Q_2 a BC oldal B-n túli meghosszabbításának pontja. Ezekből a betűzés megfordításával kapjuk, hogy Q_5, Q_4 a $C'B'$, $B'A'$ oldalnak C'-n, B'-n túli meghosszabbításán van. Q_3 viszont a CA' és Q_6 a $C'A$ szakaszon fekszik, mert a PCA', $PC'A$ háromszögekben C-nél és A'-nél, C' és A-nál hegyes szögek vannak. Eszerint P a H_2-höz viszonyítva a Q_6, Q_2, Q_3-nál fekvő (180°-nál kisebb) szögek terében fekszik, és a Q_1-nél, Q_5-nél fekvő egyik-egyik külső szög terében, ezért a Q_1 szög PQ_1 révén két szög különbségeként írható: $Q_6Q_1Q_2\sphericalangle=PQ_1Q_2\sphericalangle-PQ_1Q_6\sphericalangle$ a Q_6, Q_2, Q_3-nál fekvő szögek pedig PQ_6, PQ_2, PQ_3-mal két szög összegére bonthatók, pl. $Q_2Q_3Q_4\sphericalangle=Q_2Q_3P\sphericalangle+PQ_3Q_4\sphericalangle$.

Folytatólag a PQ_1Q_2B és PQ_1AQ_6 „talpponti" húrnégyszögek, majd a $PABC$ „k-beli" húrnégyszög révén (mivel bármelyik szög egyenlő a szemben fekvő szög külső szögével) $Q_6Q_1Q_2\sphericalangle=PBC\sphericalangle-PAC'\sphericalangle=PAC\sphericalangle-PAC'=C'AC\sphericalangle$, és ez feltevésnél fogva derékszög: a CC' átmérő látószöge a k-n fekvő A pontból. – Majdnem ugyanígy halad a bizonyítás a többi három szög esetében is. A megkezdett példát folytatva: $Q_2Q_3Q_4\sphericalangle=BCP\sphericalangle+PA'B'\sphericalangle=BCP\sphericalangle+PCB'\sphericalangle=BCB'\sphericalangle$, ami derékszög. (Olyan, a szereplőkkel egyenlő szögekre térünk át, melyek H_1 csúcsaival vannak meghatározva, majd amelyeknek csúcsuk és egyik száruk közös, és így összegük egyetlen szögként írható.)

Ezzel az állítás első részét bebizonyítottuk.

III. megoldás: Megmutatjuk, hogy H_2-nek egy oldala a tőle számított második oldallal párhuzamos, és a harmadikra merőleges; ebből már következik, hogy a második és a harmadik oldal egymásra merőleges, vagyis az állítás első része igaz. Valóban, egyrészt pl. Q_6Q_1 párhuzamos Q_3Q_2-vel, mert egyenlő szöget alkotnak a Q_6P (másképpen Q_3P) félegyenessel: $PQ_6Q_1\sphericalangle=PAQ_1\sphericalangle=PCQ_2\sphericalangle=PQ_3Q_2\sphericalangle$ továbbá Q_1 és Q_2 a PQ_3 egyenesnek ugyanazon partján feküsznek. Másrészt Q_6Q_1 merőleges Q_3Q_4-re. Ugyanis a Q_6-nál derékszögű PAQ_6 és a Q_3-nál derékszögű $A'PQ_3$ háromszögek hasonlók, mert P-nél fekvő hegyes szögeik PA és PA' merőlegessége folytán egymásnak pótszögei; a PAQ_6 háromszög egy $+90^\circ$ szögű forgatva nyújtással áll elő $A'PQ_3$-ból (megfelelők azok a csúcsok, amelyek a két felsorolásnak ugyanannyiadik tagjai). Ugyanez érvényes a Q_1-nél, Q_4-nél derékszögű PAQ_1 és $A'PQ_4$ háromszögekre is, és így a PQ_6AQ_1, $A'Q_3PQ_4$, négyszögekre is, mert a hasonlóság aránya mindkét esetben ugyanaz: a PA, $A'P$ átfogók aránya. Így Q_6Q_1 is $+90°$-os forgatva nyújtással áll elő Q_3Q_4-ből (ez többet is mond annál, mint amit állítottunk), ennélfogva Q_3Q_2 merőleges Q_3Q_4 -re.

Megjegyzés. Egyenesek párhuzamosságára támaszkodik a következő bizonyítás is. Legyen k és a PQ_6 egyenes második közös pontja P^*. Ekkor $CQ_2Q_3\sphericalangle = CPQ_3\sphericalangle = CPP^*\sphericalangle = CBP^*\sphericalangle$, eszerint P^*B párhuzamos Q_3Q_2-vel. Hasonlóan $P^*B' \parallel Q_3Q_4$, így a $Q_2Q_3Q_4$ szög egyállású a BP^*B' szöggel, ez pedig derékszög.