1. Az 1958. évi Országos Középiskolai Matematikai Tanulmányi Verseny **II.** fordulóján kitűzött 2. feladat a következő volt[1]:

Legyen a és b egész szám. Bizonyítandó, hogy

$$x^2 + ax + b$$

csak akkor állíthat elő végtelen sok egész x értékre négyzetszámot, ha a kifejezés egy elsőfokú polinom négyzete.

Mind a két közölt megoldás lényegesen kihasználja, hogy a polinom másodfokú. Adható azonban a feladatnak olyan megoldása is, amelyikben a polinom fokszáma nem játszik lényeges szerepet, s így alkalmas a következő lényegesen általánosabb tétel bizonyítására:

Ha egy n-ed fokú egész együtthatós polinomban a legmagasabb fokú tag együtthatója 1 és a polinom értéke végtelen sok egész helyen egész szám n-edik hatványa, akkor a polinom egy egész együtthatós elsőfokú polinom n-edik hatványa.

2. Azt fogjuk megmutatni, hogy ha a tétel állítása nem teljesül, akkor egy megadható korlát fölött minden egész helyen a polinom értéke két szomszédos egész szám n-edik hatványa közé esik, így nem lehet egész szám n-edik hatványa.

Ennek bizonyítása a következő megjegyzésen fog alapulni: *Minden*

$$g(x) = c_0x^k + c_1x^{k-1} + \ldots + c_{k-1}x + c_k$$

polinomhoz megadható egy K korlát úgy, hogy minden K-nál nagyobb x értékre már $g(x)$ olyan előjelű, mint c_0.

Állításunk magától értetődő, ha $k = 0$, azaz $g(x)$ állandó. Ha $k \geqq 1$, akkor biztosan teljesül az állítás, ha x pozitív és c_0x^k abszolút értéke nagyobb, mint a többi tagok összegének az abszolút értéke, ez pedig nem nagyobb, mint a tagok abszolút értékének összege:

$$\mid c_1 \mid x^{k-1} + \mid c_2 \mid x^{k-2} + \ldots + \mid c_{k-1} \mid x + \mid c_k \mid .$$

Ha csak 1-nél nagyobb x értékekre szorítkozunk, tehát K értéke legalább 1, akkor ezt az összeget tovább növeljük (vagy legalább is nem csökkentjük, ha ugyanis $k = 1$) minden együttható szorzójául x^{k-1}-t írva. Biztosan teljesül tehát állításunk, ha $\mid c_0 \mid x^k$ az így növelt összegnél is nagyobb, azaz ha

$$\mid c_0 \mid x^k > (\mid c_1 \mid + \mid c_2 \mid + \ldots + \mid c_{k-1} \mid + \mid c_k \mid) x^{k-1},$$

azaz, ha

$$x > \frac{\mid c_1 \mid + \mid c_2 \mid + \ldots + \mid c_{k-1} \mid + \mid c_k \mid}{\mid c_0 \mid}.$$

Ha tehát K gyanánt az itt nyert szám és 1 közül a nagyobbat választjuk, akkor teljesül állításunk.

3. A bizonyítandó állításban $x + d$ alakú kifejezés n-edik hatványáról van szó. Ezt a hatványt polinom alakba írva a legmagasabb fokú tag x^n lesz; az $n-1$-ed fokú tagot úgy kapjuk, ha az

$$(x+d)^n = (x+d)(x+d)\ldots(x \overset{\overset{n}{\smile}}{+} d)$$

szorzatban minden lehető módon egy tényezőből a d-t, a többiből az x-et szorozzuk össze; mivel n-féleképpen választhatjuk azt a tényezőt, amelyikből d-t vesszük ki, így a polinom $n-1$-ed fokú tagja ndx^{n-1}:

$$(x+d)^n = x^n + ndx^{n-1} + \ldots$$

(A további tagok együtthatója is könnyen megadható volna, de erre nem lesz szükségünk.)

4. Legyen most már

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$$

egy egész együtthatós polinom. Megmutatjuk, hogy ha ez nem egy elsőfokú egész együtthatós kifejezés n-edik hatványa, akkor legfeljebb véges sok egész helyen lehet az értéke egész szám n-edik hatványa.

Legyen d az az egész szám, amelyre $nd \leqq a_1 < n(d+1)$. ekkor

$$f(x) - (x+d)^n = (a_1 - nd)x^{n-1} + \ldots = f_1(x)$$

egy legfeljebb $n-1$-ed fokú polinom (lehet, hogy az $n-1$-ed fokú tag együtthatója és esetleg néhány további együttható is 0), de nem tűnhet el minden együttható, ha $f(x) \neq (x+d)^n$.

Tegyük fel először, hogy $f_1(x)$ legmagasabb fokú ténylegesen fellépő tagjának az együtthatója pozitív, akkor képezzük az

$$f(x) - (x+d+1)^n = \big(a_1 - n(d+1)\big)x^{n-1} + \ldots = f_2(x)$$

[1] Középiskolai Matematikai Lapok, új sorozat 17 (1958), 68–69 old.

polinomot. Itt d megválasztása szerint az $n-1$-ed fokú tag együtthatója negatív, és ez a tag a polinom legmagasabb fokú tagja.

A 2. pontban bizonyított segédtétel szerint van olyan K_1és K_2 állandó, hogy

$$f_1(x) > 0, \quad \text{ha} \quad x < K_1, \qquad\qquad f_2(x) < 0, \quad \text{ha} \quad x > K_2.$$

Jelöljük K_1 és K_2 közül a nagyobbat K-val, akkor minden K-nál nagyobb x-re

$$f_1(x) = f(x) - (x+d)^n > 0, \qquad f_2(x) = f(x) - (x+d+1)^n < 0,$$

azaz

$$(x+d)^n < f(x) < (x+d+1)^n.$$

Így a most tárgyalt esetben minden K-nál nagyobb egész x értékre $f(x)$ két egymás utáni egész szám n-edik hatványa közé esik, tehát nem lehet egész szám n-edik hatványa.

5. Ha $f_1(x)$ legmagasabb fokú tagjának az együtthatója negatív, akkor az

$$f(x) - (x+d-1)^n = \big(a_1 - n(d-1)\big)x^{n-1} + \ldots = f_3(x)$$

polinomot képezzük, ebben a legmagasabb az $n-1$-ed fokú tag és ennek az együtthatója d megválasztása szerint pozitív.

Így az előbbi meggondoláshoz hasonlóan meg tudunk ebben az esetben egy olyan K értéket adni, amelynél nagyobb x-értékekre

$$f_1(x) = f(x) - (x+d)^n < 0, \qquad f_3(x) = f(x) - (x+d-1)^n > 0,$$

tehát

$$(x+d-1)^n < f(x) < (x+d)^n.$$

Ebben az esetben sem lehet tehát a K-nál nagyobb egész értékekre $f(x)$ értéke egy egész szám n-edik hatványa.

Azt nyertük tehát, hogy $f(x)$ értéke nem lehet végtelen sok pozitív egész x értékre egész szám n-edik hatványa, kivéve, ha $a_1 = nd$ és $f(x) = (x+d)^n$.

6. Végül a negatív egész x értékek esetét visszavezethetjük a már tárgyalt esetre. Ugyanis $f(x)$ negatív helyen vett értékei megegyeznek az $f(-x)$ polinom pozitív helyen felvett értékeivel és ha ezek valamelyike egész szám n-edik hatványa; akkor ugyanez áll az

$$f^*(x) = (-1)^n f(-x) = x^n - a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} - \ldots + (-1)^n a_n$$

polinomra is. Megfordítva, ha valamilyen x értékre $f^*(x)$ egy egész szám n-edik hatványa; akkor ugyanez ájl az

$$f(x) = (-1)^n f^*(-x)$$

polinomra is.

Az előbbi meggondolás szerint $f^*(x)$ értéke nem lehet végtelen sok egész helyen egész szám n-edik hatványa, kivéve, ha $a_1 = nd$ és $f(x) = (x-d)^n$.

Ebben az esetben

$$f(x) = (-1)^n f^*(-x) = (-1)^n(-x-d)^n = (x+d)^n.$$

Az előző bekezdés végén megfogalmazott következtetésünk így pozitív egész értékek helyett mindén egész x értékre érvényes. Ezzel bebizonyítottuk az **1.** pontban kimondott tételt.