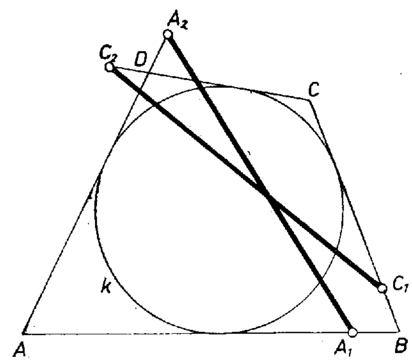


1. ábra

a) A szerkesztés szerint AA_1A_2 egyenlő szárú háromszög, így (1. ábra)

$$A_1A_2^2 = 4AA_2^2 \sin^2 \frac{A_1AA_2\sphericalangle}{2} = 4AB \cdot AD \sin^2 \frac{BAD\sphericalangle}{2} = 2AB \cdot AD(1 - \cos BAD\sphericalangle), \tag{1}$$

és a cosinustétel alkalmazásával

$$A_1A_2^2 = 2AB \cdot AD - (AB^2 + AD^2 - BD^2) = BD^2 - (AB - AD)^2. \tag{2}$$

Hasonlóan a CC_1C_2 egyenlő szárú háromszögből és a cosinustételt a BCD háromszögre alkalmazva

$$C_1C_2^2 = 2CB \cdot CD(1 - \cos BCD\sphericalangle) = BD^2 - (CB - CD)^2. \tag{3}$$

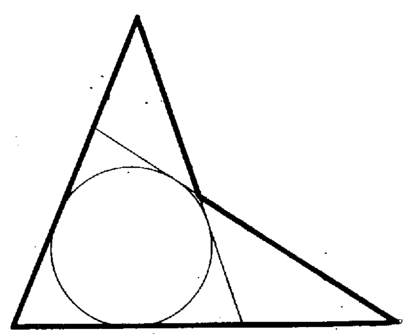
És mivel k belülről érinti négyszögünk oldalait, azért

$$AB + CD = BC + AD,$$

innen

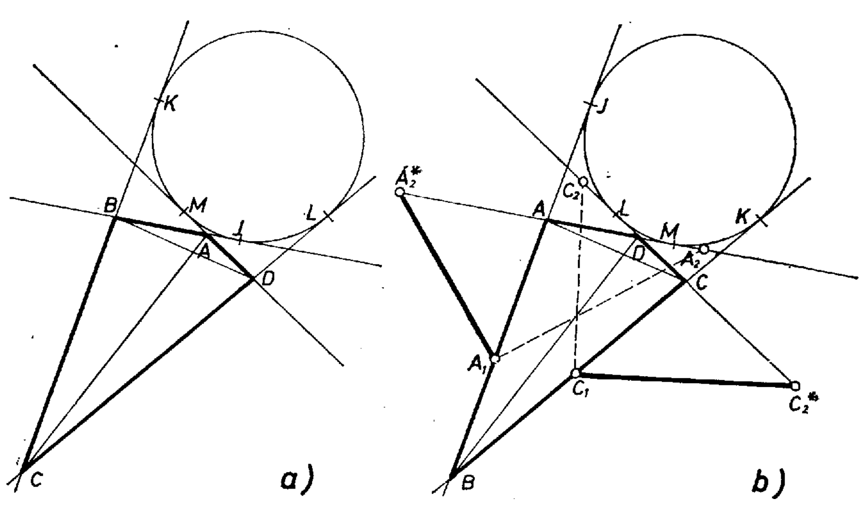
$$AB - AD = CB - CD, \tag{4}$$

tehát (2) és (3) jobb oldalai egyenlők. igy pedig $A_1A_2 = C_1C_2$, hiszen szakaszok hossza pozitív.



2. ábra

b) Ha k nincs az N belsejében, akkor azokban a háromszögekben sincs benne, amelyeket N egy–egy oldalának elhagyásával kapunk, így k bármelyik ilyen háromszögnek külső érintő köre. Nem nehéz belátni, hogy csak a 3. ábra *a)* és *b)* részén látható típusú helyzetekkel kell foglalkoznunk (mert a 2. ábra típusában k benne van a konkáv N-ben).



3. ábra

Foglalkoznunk kell mind a két esettel. Mert bár igaz, hogy a 3*a)* és 3*b)* ábrák csupán betűzésben különböznek: az *a)* ábrán k az A és C szögeknek a tartományában, ill. a csúcsszögtartományában van benne, a B és D szögeknek pedig a mellékszögtartományában, és a *b)* ábra ebből az A, C és B, D betűpárok felcserélésével keletkezett, a feladat szempontjából viszont az A, C pár szerepe és a B, D, páré egymástól különböző.

A 3a) ábra esetében az állítás érvényes marad, mert a bejelölt érintési pontok felhasználásával a (2)-beli különbség, az egyes csúcsokból húzott érintőszakaszok egyenlőségét felhasználva, egyenlőnek adódik a (3)-beli különbség (-1)-szeresével:

$$AB - AD = (JB - JA) - (MD - MA) = KB - LD = (KC - BC) - (LC - DC) = CD - CB,$$

tehát fenti záró következtetésünk érvényes.

Ebben a helyzetben ezt találtuk:

$$BA + BC = DA + DC,$$

és ez a 3*b)* ábra betűzése szerint a következőbe megy át:

$$AD + AB = CD + CB, \tag{5}$$

ennek alapján pedig a (2) és (3)-beli különbségekre semmit sem mondhatunk ki, ebben az esetben a feladat állítása általában nem marad érvényben (deltoid esetében megmarad, de ennek szimmetriája miatt semmitmondó).

Eredményeink így is kimondhatók: ha az AB, AD egyenesek egyike sem választja szét a kört és a négyszöget, vagy mindegyike szétválasztja, akkor az állítás érvényes – és ekkor CB-hez is, CD-hez képest is k és N egyformán helyezkednek el –, ha pedig AB és AD egyike elválasztja k-t N-től, a másika nem, akkor az állítás nem érvényes.

Csekély módosítással viszont érvényes lesz az állítás a 3*b)* ábra esetére is. A (2) zárójelében álló mínusz jel az (1)-beli mínusz jelből öröklődött át, így az (5) bal oldalán álló plusz jelet úgy használhatnók fel, ha (1)-ben is plusz jel állna, más szóval, ha a BAD szög mellékszögét használjuk fel. Ez azt jelenti, hogy pl. AA_1-et B felé, AA_2-t pedig a D-vel ellentétes irányban felmérve — és persze (3)-ra tekintettel ugyanígy CC_2-t a D-vel ellentétes irányban – az állítás érvényessé válik a 3*b)* ábra esetében is.

Maróti György (Győr, Czuczor G. Bencés Gimn., III. o. t.)
dolgozata alapján, kiegészítésekkel