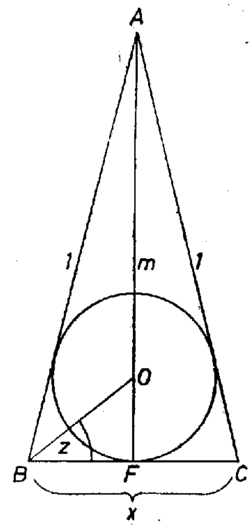
I. megoldás. *a)* A beírt kör 2ϱ átmérőjét a változó x alap függvényeként fejezzük ki az ismert $\varrho = t/s$ összefüggés felhasználásával (m a tengelybeli magasság, 1. ábra):

$$2\varrho = \frac{2t}{s} = \frac{4t}{2s} = \frac{2xm}{2+x} = \frac{x}{2+x}\sqrt{4-x^2} = x\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}. \tag{1}$$



1. ábra

Természetesen csak az $x > 0$ értékekre értelmezzük a függvényt, így $2\varrho > 0$, tehát ugyanannál az x értéknél van maximuma – ha egyáltalán van –, mint négyzetének, az

$$y = (2\varrho)^2 = \frac{x^2(2-x)}{2+x} = \frac{2x^2 - x^3}{x+2}$$

függvénynek, ezt fogjuk keresni.

Szélső érték csak ott lehet, ahol a derivált eltűnik:

$$y' = \frac{(4x-3x^2)(x+2) - (2x^2 - x^3)\cdot 1}{(x+2)^2} =$$
$$= \frac{-2x(x^2+2x-4)}{(x+2)^2} = \frac{-2x\left(x+\sqrt{5}+1\right)}{(x+2)^2}\left(x+1-\sqrt{5}\right) = 0,$$

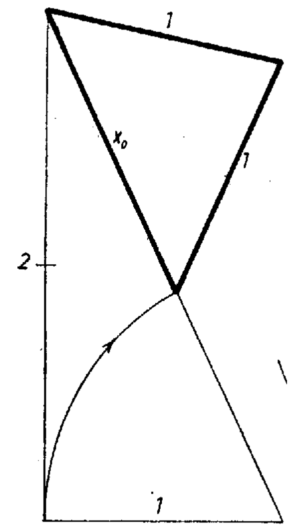
ami az $x > 0$ korlátozás miatt csak az

$$x_0 = \sqrt{5} - 1 \qquad (\approx 1{,}236) \tag{2}$$

helyen következik be, hiszen az utolsó alak elöl álló törtjében a változó tényezők pozitívok, és a tört állandóan negatív.

A mondott helyen maximum *van,* mert $x < x_0$ esetén $x + 1 - \sqrt{5} < 0$, tehát $y' > 0$, ha pedig $x > x_0$, akkor $y' < 0$. A maximum értéke (2) és (1) alapján $2\varrho_{\max} = \sqrt{10\sqrt{5} - 22} \approx 0{,}601$.

b) A szerkesztés: derékszögű háromszöget szerkesztünk 1 és 2 befogókkal, a $\sqrt{5}$ átfogóra egyik végpontjából egységnyi hosszúságot mérünk fel, és az így maradó x_0 alap fölé 1 szárral egyenlő szárú háromszöget szerkesztünk (2. ábra).



2. ábra

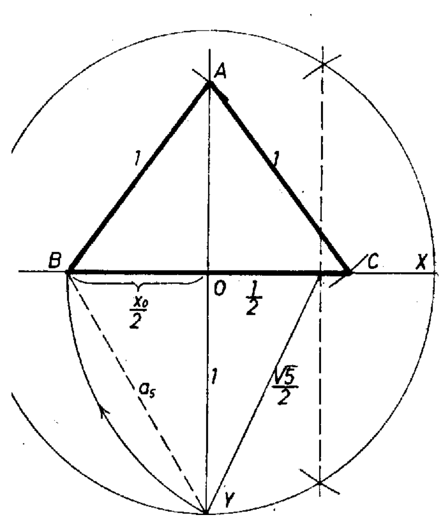
Csetényi Artúr (Szeged, Radnóti M. Gimn., I. o. t.)

Megjegyzések. 1. A közvetett függvény deriválási szabálya alapján (1) jobb oldalának deriváltjából is megállapíthatjuk a szélső érték helyét:

$$(2\varrho)' = \sqrt{\frac{2-x}{2+x}} + x \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2+x}{2-x}} \cdot \frac{-(2+x)-(2-x)}{(2+x)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{2-x}{2+x}}\left(1 - \frac{2x}{4-x^2}\right) = \sqrt{\frac{2-x}{2+x}} \cdot \frac{4-2x-x^2}{4-x^2}.$$

2. Felismerve, hogy a maximumra vezető x_0 alap 2-szer akkora, mint az egységsugarú körbe írt szabályos tízszög oldala, a kívánt háromszöget megszerkeszthetjük a szabályos ötszög szerkesztésére sokak által ismert *Ptolemaiosz–Dürer*-féle eljárás utolsó lépésének módosításával is (3. ábra).



3. ábra

II. megoldás (a feladat számító részére). Független változónak az alapon levő szög felét, z-t véve $0° < z < 45°$, az 1. ábrán $BF = \cos 2z$, és így

$$\varrho = OF = BF \operatorname{tg} z = (2\cos^2 z - 1)\operatorname{tg} z = \sin 2z - \operatorname{tg} z,$$

$$\varrho' = 2\cos 2z - \frac{1}{\cos^2 z} = \frac{4\cos^4 z - 2\cos^2 z - 1}{\cos^2 z} =$$

$$= \frac{4\cos^2 z + \sqrt{5} - 1}{4\cos^2 z}\left[4\cos^2 z - \left(\sqrt{5}+1\right)\right],$$

ami csak akkor tűnik el, ha

$$\cos^2 z = \frac{\sqrt{5}+1}{4} \left(> \frac{1}{2}\right), \qquad \cos z_0 = \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{4}},$$

$2z_0 = 51^\circ\ 50'$, hiszen az elöl álló tört mindig pozitív. A cosinus függvény z_0 környezetében monoton csökkenő, így a [ ]-beli tényező is, $z < z_0$ esetén $\varrho' > 0$, $z > z_0$ esetén $\varrho' < 0$, tehát maximum van. Az alap hosszára ebből is $BC = 2\cos 2z_0 = 4\cos^2 z_0 - 2 = \sqrt{5} - 1$ adódik.

Chikán Bálint (Eger, Gárdonyi G. Gimn., III. o. t.)