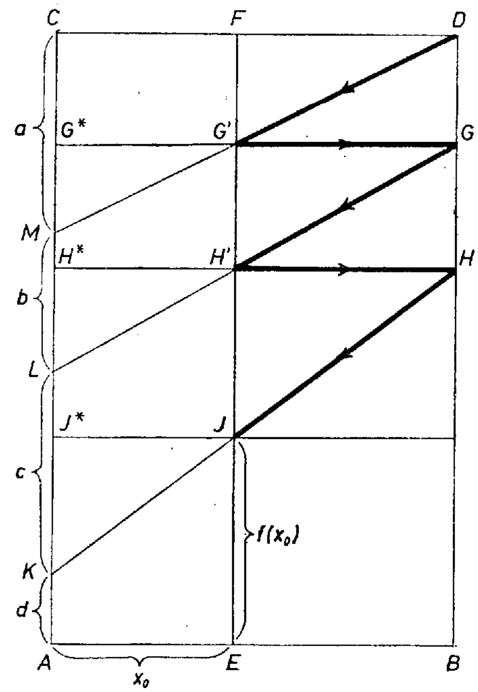

I. megoldás. Hosszabbítsuk meg GG'-t és HH'-t az AC egyenessel való G^*, ill. H^* metszéspontig, továbbá húzzunk párhuzamost AB-vel J-n át és jelöljük ennek AC-vel való metszéspontját J^*-gal. A keletkezett alábbi hasonló derékszögű háromszögpárok alapján rendre

$$MG^*G'\triangle \sim MCD\triangle, \qquad MG^* = MC\cdot\frac{G^*G'}{CD} = ax_0,$$

$$LH^*H'\triangle \sim LG^*G\triangle, \qquad LH^* = LG^*\cdot\frac{H^*H'}{G^*G} = (LM+MG^*)\cdot x_0,$$

$$KJ^*J\triangle \sim KH^*H\triangle, \qquad KJ^* = KH^*\cdot\frac{J^*J}{H^*H} = (KL+LH^*)\cdot x_0,$$

ezért, fokozatos behelyettesítéssel

$$\begin{aligned} EJ =&AJ^* = AK+KJ^* = d+(c+LH^*)\cdot x_0 = d+x_0\big[c+(b+MG^*)\cdot x_0\big] = \\ &= d+x_0\big[c+x_0(b+ax_0)\big] = d+cx_0+bx_0^2+ax_0^3 = f(x_0), \end{aligned} \tag{1}$$

amit bizonyítanunk kellett.

Ha az együtthatókat, valamint az x_0 értékét ábrázoló AK, KL, LM, MC, AE szakaszokat – esetleges negatív előjelük esetén – az eredetivel ellentétes irányban mérjük fel, 0 együttható esetén pedig a K, L, M, ill. C pontot azonosnak vesszük rendre A-val, K-val, L-lel, ill. M-mel, továbbá a felhasznált egyeneseket mindig meghosszabbítjuk a kívánt metszésig, akkor – mint hasonlóan belátható – az eljárás bármely (valós együtthatós) legfeljebb harmadfokú polinomnak bármely (valós) x_0 helyen felvett értékét előállítja, sőt további együtthatók megfelelő sorrendű felmérése után bármely magasabb fokú polinomét is. Az eredmény (EJ, ill. megfelelője) ugyancsak előjelével együtt értendő: amennyiben J az AB egyenesnek C-t nem tartalmazó oldalán adódik, $f(x_0)<0$. $x_0=1$ esetén – amikor ugyan az eredmény nyilvánvaló – E a B-be esik, F, G', H' és J pedig D-be. EJ-ként $BD=a+b+c+d$ adódik.

A bizonyításban a hasonló háromszögekből a szakaszok abszolút értékét kapjuk, előjelüket esetenként kellő meggondolással kell megállapítani. Ezt egyszerűvé, ill. feleslegessé teszi az alábbi II. megoldás.

Kálmán Miklós (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., III. o. t.)

Megjegyzés. Többen megjegyezték, hogy az (1)-beli első alak – jobbról bal felé, egyszersmind a legbelső zárójelből kifelé olvasva – az $f(x_0)$ kiszámítására ma „Horner-módszer” néven ismert eljárás: váltakozva szorzást és hozzáadást végzünk, a szorzó mindig x_0, az első szorzandó a, a hozzáadott tag mindig a hatványok csökkenő rendjében következő együttható.

W. G. Horner 1786–1837 élt, ezt Segner élet-adataival egybevetve látjuk, hogy Horner nem az elvet fedezte fel; hanem a számítás részeredményeinek *elrendezésére* adott olyan ügyes módot, amely bizonyos esetekben mindjárt előkészít egy további számítást. Eszerint a fenti mellett ugyancsak használatos Horner-*séma*, vagy Horner-*elrendezés* elnevezés a helyes, a lényeget kifejező.

II. megoldás. Az eljárás helyességét koordináta-geometriai úton bizonyítjuk. Legyenek a derékszögű rendszer tengelyei AB és AC, ekkor a felhasznált pontok koordinátái:

$B\ (1,\ 0)$, $E(x_0,\ 0)$, $K(0,\ d)$, $L(0,\ d+c)$,
$M\ (0,\ d+c+b)$, $C(0,\ d+c+b+a)$, $D(1,\ d+c+b+a)$.

A DM egyenes egyenlete, és abból az $x=x_0$ egyenletű EF egyenessel való G' metszéspontjának, továbbá G-nek koordinátái:

$$y=(d+c+b)+ax,$$
$$G'(x_0,\ d+c+b+ax_0),\quad G(1,\ d+c+b+ax_0).$$

Hasonlóan GL egyenlete és abból H' és H közös ordinátája

$$y=(d+c)+(b+ax_0)x,$$
$$d+c+x_0(b+ax_0),$$

végül HJ egyenlete és J ordinátája

$$y=d+\big[c+x_0(b+ax_0)\big]x,$$
$$(EJ=)\qquad d+x_0\big[c+x_0(b+ax_0)\big]=f(x_0).$$

Az a, b, c, d, x_0 számokra semmiféle korlátozást nem használtunk fel, tehát az eljárás a tett korlátozások nélkül érvényes.

Simon Júlia (Győr, Kazinczy F. Gimn., III. o. t.)