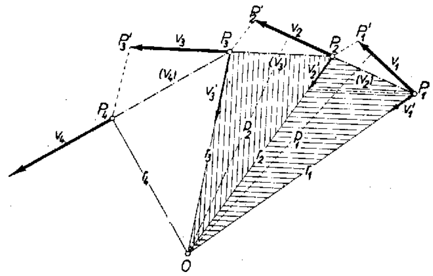
I. A TERÜLETI SEBESSÉG ÁLLANDÓSÁGA. A centrális mozgásokat az jellemzi, hogy a vezérsugár egyenlő idők alatt egyenlő területeket ír le a térben, s ez a „területi elv” mértani okok miatt minden centrális mozgásra érvényes, mégpedig az erőtörvény alakjától függetlenül!



Levezetés céljából induljunk ki abból a pillanatból, amikor az ábra szerint a bolygó tömegközéppontja (a következőkben: a mozgó pont) a vonzó O középponttól r_1 távolságra levő P_1 helyre érkezik v_1 sebességgel. Ha nem volna vonzó erő, akkor tehetetlensége következtében 1 mp múlva a P_1' helyzetbe jutna, a vonzás miatt azonban ugyanezen idő alatt bizonyos v_1' elmozdulás jön létre a centrum irányában, s így az első mp végére P_2-be jut az eredményvonallal jelzett eredő v_2 sebességgel, s eközben az r_1 vezérsugár a vízszintes árnyékolású területet írja le.

Ha nem lenne vonzás, akkor a P_2 helyre érkezett pont megváltozott, v_2 sebességgel 1 mp múlva a P_2' helyre kerülne, miközben azonban v_2' sebességet nyer a centrum felé, s ennek következtében a második mp végére az eredő sebesség v_3, a pont helyzete P_3, a vezérsugár leírta terület pedig a függőleges árnyékolású háromszög lesz. Ezt az eljárást folytatva: a harmadik mp végén az eredő sebesség (v_4), a mozgó pont helyzete P_4, a vezérsugár leírta terület pedig az árnyékolatlan $r_3r_4(v_4)$ háromszög lesz. A szerkesztésből mármost világosan láthatók a következők

1. Mindegyik vezérsugár súlyvonala egy balról nyitott OP_1P_2', illetve OP_2P_3' nagyobb háromszögnek, amelynek jobb oldali zárt fele az előző mp-ben leírt területet, a vele egyenlő területű nyitott fele pedig a következő mp-hez való átmenetet képviseli.

2. Mivel az eredő sebességet paralelogramma-szerkesztéssel nyerjük, ennélfogva az egyes vezérsugarakhoz tartozó nyitott és zárt háromszögek egyenlő területűek, mert alapjuk közös, magasságuk pedig a párhuzamos eltolás közben nem változik s így a nyitott $\triangle$-ek a következő mp-ben leírt területbe mennek át. *E $\triangle$-eknek tehát csak az alakjuk különböző, területük azonban ugyanakkora.*

Ha tehát most a v_1, illetve v_2 sebességeket tekintjük alapnak, s a vonzó centrumból rájuk húzott merőlegeseket (a latin „perpendikuláris” szó kezdőbetűjéről) p_1, illetve p_2-vel jelöljük, akkor az említett $\triangle$-ek területének egyenlősége miatt

$$p_1v_1 = p_2v_2,$$

vagy aránylat alakjában írva

$$v_1 : v_2 = p_2 : p_1,$$

tehát *a mindenkori sebességek fordítva aránylanak a vonzó központból rájuk húzott merőlegesekhez.*

A bolygó tehát a Napközelben éri el, legnagyobb v_0 sebességét, amikoris a hozzá tartozó merőleges éppen a legrövidebb vezérsugár: $r_0 = a - c$, a legkisebb v_a sebesség viszont a naptávolnál (aphelium) jelentkezik, amikor a hozzá tartozó merőleges a leghosszabb vezérsugár: $r_a = a + c \cdot A$ kettő hányadosa, azaz

$$\frac{v_0}{v_a} = \frac{\text{napközeli sebesség}}{\text{naptávoli sebesség}} = \frac{a+c}{a-c},$$

hol az ellipszis fél nagytengelye a, lineáris excentricitása pedig c. Ezzel azután előkészítettük az utat a sebesség szélső értékeinek tényleges meghatározásához.

II. A SEBESSÉG SZÉLSŐ ÉRTÉKEI a területi- és az energia-elv segítségével határozhatók meg. Az utóbbi szerint a mozgási és helyzeti energia összege az egész mozgás folyamán állandó marad, vagyis

$$\frac{mv_0^2}{2} - \frac{kMm}{r_0} = \frac{mv_a^2}{2} - \frac{kMm}{r_a} \tag{1}$$

ahol k a tömegvonzás állandója, M a Nap, m pedig a bolygó tömege, a helyzeti energiát pedig azért vesszük $-$ előjellel számításba, mert növekvő r esetén értéke csökken.

A területi elv szerint viszont

$$v_ar_a = v_0r_0, \tag{2}$$

s így két egyenletünk van a két ismeretlen sebesség meghatározására. A második négyzetéből

$$v_a^2 = v_0^2 \cdot \frac{r_0^2}{r_a^2} \tag{2'}$$

s ezt (1)-be helyettesítve, v_0^2 -re mindjárt rendezve és kiemelve

$$v_0^2\left(1-\frac{r_0^2}{r_a^2}\right)=2kM\left(\frac{1}{r_0}-\frac{1}{r_a}\right).$$

Közös nevezőre hozva

$$v_0^2\left(\frac{r_a^2-r_0^2}{r_a^2}\right)=\frac{2kM}{r_0}\left(\frac{r_a-r_0}{r_a}\right),$$

majd a zárójeles részeket a jobb oldalival egyszerűsítve

$$v_0^2\,\frac{r_a+r_0}{r_a}=\frac{2kM}{r_0}$$

s ebből a keresett

$$v_0^2=2kM\,\frac{r_a}{r_0(r_a+r_0)}.$$

Mivel az ellipszis adataival kifejezve

$$r_a=a+c\,r_0=a-c$$

ezeket helyettesítve

(3) $$v_0^2=\frac{kM}{a}\cdot\frac{a+c}{a-c}$$

alakban nyerjük a napközelben jelentkező sebesség négyzetét, amiből maga a sebesség egyszerű négyzetgyökvonással nyerhető.

A (3) értékét ($2'$)-be helyettesítve: egyszerűsítés után a naptávolhoz tartozó sebességre vonatkozólag

$$v_a^2=\frac{kM}{a}\cdot\frac{a-c}{a+c}.$$

Ezzel azután előkészítettük az utat a tetszés szerinti r vezérsugárhoz tartozó v sebesség meghatározására!

III. A SEBESSÉG ÁLTALÁNOS KIFEJEZÉSE szintén az energia-elv alapján történik a v_0 perihélium-sebesség felhasználásával az előbbihez hasonló lépésekben:

$$\frac{mv^2}{2}-\frac{kMm}{r}=\frac{mv_0^2}{2}-\frac{kMm}{r_0}$$
$$v^2-\frac{2kM}{r}=v_0^2-\frac{2kM}{r_0}.$$

Helyettesítve v_0^2-nek (3) alatti kifejezését és v^2-re rendezve, majd $2kM$ kiemelése után közös nevezőre hozva

$$v^2=\frac{kM}{a}\cdot\frac{a+c}{a-c}+2kM\left(\frac{r_0-r}{r_0r}\right).$$

Helyettesítve $r_0=a-c$ értéket, majd kM kiemelése után közös nevezőre hozva

$$v^2=kM\left[\frac{a+c}{a(a-c)}+2\,\frac{a-c-r}{(a-c)r}\right]=kM\,\frac{ar+cr+2a^2-2ac-2ar}{a(a-c)r}.$$

A számláló harmadik és negyedik tagját $2a$ kiemelése után előre hozva, s a lehetséges összevonások után a közös r tényezőt $-$ jellel kiemelve

$$v^2=kM\,\frac{2a(a-c)-r(a-c)}{a(a-c)r},$$

majd a törtet két tagra bontva, a lehetséges egyszerűsítések elvégzése után végleges

(4) $$v^2=kM\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right)$$

aránylag egyszerű alakban nyerjük a bolygómozgás sebességének általános képletét.

IV. ALKALMAZÁS A MESTERSÉGES BOLYGÓK PROBLÉMÁIRA.

1. *A körsebesség* akkor szerepel, amikor a vezérsugár $r=a$ állandó. Ekkor a (4) képlet zárójeles részének értéke $2/r-1/r=1/r$ lesz s így a körsebesség

(5) $$v=\sqrt{\frac{kM}{r}}$$

alakban állítható elő, hol r a körpálya sugarát jelenti. Ha tehát a vonzó centrumtól r távolságban s rá merőlegesen kilövünk egy testet az (5) sebességgel, akkor ellenállásmentes térben körpályán fog keringeni. Egy teljes T keringési idő alatt a v sebességgel megtett út $2r\pi$ lesz, s így a $Tv = 2r\pi$ összefüggésből (Kepler III. törvényének megfelelően!)

(6) $$T = \frac{2r\pi}{v} = \frac{2r\pi}{\sqrt{kM}} \cdot \sqrt{r} = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{kM}}$$

Ezt a kifejezést igen érdekes alakra hozhatjuk annak megfontolásával, hogy a tömegegységre ható $\frac{kM}{r^2}$ erő tulajdonképpen az r távolságban jelentkező g gravitációs gyorsulást jelenti, ha tehát a (6) kifejezésben szereplő tört számlálóját és nevezőjét egyaránt osztjuk r^2-tel, akkor a teljes T periódus új kifejezése

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r}{g}}$$

oly ideális inga teljes lengésidejével egyenlő, melynek hosszúsága a vonzó centrumtól számított r távolság, g pedig a kérdéses helyen uralkodó gyorsulás.

Egyébként a körsebesség egészen elemi úton is levezethető annak belátásával, hogy a körmozgás fenntartásához szükséges mv^2/r centripetális erőt tulajdonképpen az m tömegnek mg súlya képviseli s így az

$$\frac{mv^2}{r} = mg$$

feltételi egyenletből $v^2 = rg$, illetve

(7) $$v = \sqrt{rg}.$$

Egyébként az (5) képlet is ugyanerre az alakra hozható, mert a gyökös rész számlálóját és nevezőjét r-rel szorozva

$$v = \sqrt{r \cdot \frac{kM}{r^2}},$$

már pedig előző meggondolásaink szerint a gyök alatti tört éppen a g gyorsulást jelenti, mely itt általánosabb értelemben veendő.

Mivel *Newton* törvénye értelmében a nehézségi erő terében jelentkező gyorsulások fordítva arányosak a vonzó központtól számított távolság négyzetével, ennélfogva a Föld sugarát R, a felszíni gyorsulást pedig G betűvel jelölve (mert ott a legnagyobb!) a

$$\frac{g}{G} = \frac{R^2}{r^2}$$

összefüggésből nyert

$$g = G\,\frac{R^2}{r^2}$$

értéket (7)-be helyettesítve

$$v = \sqrt{r \cdot \frac{R^2}{r^2} \cdot G} = \sqrt{\frac{GR^2}{r}}$$

alakban nyerjük a körsebességet egy tetszésszerinti r távolságra nézve. Ha ezt egyszerűség kedvéért a Föld sugarának többszöröseiben fejezzük ki, akkor $r = nR$ helyettesítéssel más alakban

(8) $$v = \sqrt{\frac{GR^2}{nR}} = \sqrt{\frac{RG}{n}}$$

lesz a körsebesség kifejezése. Közelítő számításoknál

$$G = 10\ \mathrm{m/sec}^2 = 10 \cdot \frac{1}{1000}\ \mathrm{km/sec}^2 = \frac{1}{100}\ \mathrm{km/sec}^2,$$

a Föld sugara 6400 km (a pontos 6370 helyett!), tehát ezek helyettesítésével

(9) $$v = \sqrt{\frac{64}{n}\ \mathrm{km}^2/\mathrm{sec}^2} = 8\ \mathrm{km/sec} \cdot \sqrt{\frac{1}{n}}.$$

Mivel a Föld felszínére nézve $n = 1$, ennélfogva 8 km/sec vízszintes kilövési sebesség elegendő lenne a körpálya előállítására légüres térben. A sebesség (8) kifejezését a (6) bal oldalába helyettesítve a keringésidő számára (a közös gyökjel alá hozatal és egyszerűsítés után) a

$$T = \frac{2r\pi}{v} = \frac{2nR\pi}{\sqrt{RG}}\sqrt{n} = 2\pi\sqrt{\frac{Rn^3}{G}} = 2\pi\sqrt{\frac{6400\ \mathrm{km}\ n^3}{10^{-2}\ \mathrm{km/sec}^2}} = 6{,}28\ \mathrm{sec} \cdot 800\sqrt{n^3}$$

kifejezést nyerjük, melynek numerikus része átszámitva 84 percet jelent s így végleges alakban

$$T = 84 \text{ perc} \cdot \sqrt{n^3}. \tag{10}$$

Mivel a Föld felszínén $n = 1$, ennélfogva itt $T = 84$ perc, vagyis ellenállásmentes mozgás esetén a vízszintesen kilőtt test ennyi idő alatt kerülné meg a Földet. Az első mesterséges holdaknál 96 perc körüli keringési idő adódott, mert a vízszintes kilövés nem az $n = 1$ értéknél, hanem valamivel magasabbról történt az utolsó rakéta-lépcső segítségével!

Ha a Föld felszínére vonatkozó értékeket az $n = 1$ miatt kis 1-es indexszel jelöljük, akkor a (9) és (10) értelmében $n = 4$ esetben $v_4 = \frac{v_1}{2}$ és $T_4 = 8\,T_1$. Az utóbbit könnyű belátni abból, hogy most a megteendő út négyakkora, a sebesség ellenben félakkora, tehát a teljes körpálya leírásához tényleg 8-szor akkora idő szükséges.

Hogy említett képleteink milyen jó közelítést adnak, kitűnik abból, hogy $n = 64$ esetben $v_{64} = 8/8 = 1$ km/sec és $T_{64} = 84 \text{ perc} \cdot 512 = 43\,008 \text{ perc} = 29{,}9$ nap, mert $\sqrt{64^3} = \sqrt{8^6} = 8^3 = 512$ és 1 nap = 1440 perc. Mivel a Hold távolsága a Föld középpontjától valamivel több, mint 60 R, kerületi sebessége 1,023 km/sec, keringési ideje pedig 27,3 nap, ezek az adatok jól egyeznek az előbbi eredményekkel, mert a kérdéses nagyobb távolságból a Hold felé közeledve: a sebességnek (a megnövekedett vonzás miatt!) növekednie s emiatt a keringési időnek csökkennie kell.

2. *A szökési vagy határsebesség* az általános (4) képletből $a = \infty$ helyettesítéssel nyerhető $v = \sqrt{\frac{2kM}{r}}$ alakban, mely a körsebességnek $\sqrt{2}$-szerese. Ekkor az ellipszis nagytengelye végtelenné válik, s így a pálya parabolába megy át. Ezt másként kritikus sebességnek is nevezik, mert ennél a test elhagyva a vonzó centrum erőterét, a végtelenbe távozik, vagyis mintegy kiszökik a vonzás hatása alól.

A következőkben néhány érdekes szökési sebességet közlünk:

1) *A Föld mint vonzócentrum esetén* a felszínre vonatkozólag $v = v_1\sqrt{2} = 11{,}2$ km/sec, a Holdnál valamivel nagyobb távolságban $v_{64} = v_{64}\sqrt{2} = 1{,}41$ km/sec, $n = 4 \cdot 10^4$ esetben, vagyis valamivel több, mint 1,5-szeres naptávolságban a $v = 8/200$ km/sec $= 4/100$ km/sec $= 40$ m/sec körsebesség miatt mindössze $v = 1{,}41 \cdot 40$ m/sec $= 56{,}4$ m/sec lenne a kritikus sebesség.

2) *A Nap mint vonzócentrum esetén*, mivel félátmérője $6{,}95 \cdot 10^{10}$ cm, $k = 6{,}66 \cdot 10^{-8}\,\text{g}^{-1}\,\text{cm}^3\,\text{sec}^{-2}$ a gravitációs állandó, $M = 1{,}98 \cdot 10^{33}$ g a Nap tömege, $kM = 1{,}337 \cdot 10^{26}\,\text{cm}^3\,\text{sec}^{-2}$, tehát a Nap felszínére vonatkozó szökési sebességre nézve

$$v^2_{\text{Nap}} = \frac{2{,}674 \cdot 10^{26}\ \text{cm}^3\ \text{sec}^{-2}}{6{,}95 \cdot 10^{10}\ \text{cm}} = 384\,748{,}2 \cdot 10^{10}\ \text{cm}^2\ \text{sec}^{-2},$$

amiből a gyökvonás elvégzése után

$$v_{\text{Nap}} = 620{,}3\ \text{km/sec}.$$

3) Végül még arra vagyunk kíváncsiak, hogy *a Naptól 150* $\cdot$ *10*^{6} km = *1,5* $\cdot$ *10*^{13} cm *távolságra* mekkora lenne a szökési sebesség? Képletünk szerint ekkor

$$v^2 = \frac{2{,}674 \cdot 10^{26}\ \text{cm}^2\ \text{sec}^{-2}}{1{,}5 \cdot 10^{13}\ \text{cm}} = 1783 \cdot 10^{10}\ \text{cm}^2\ \text{sec}^{-2}$$

amiből

$$v = 42{,}2\ \text{km/sec}.$$

Mivel Földünk nem egészen 30 km/sec átlagos sebességgel végzi keringését a Nap körül, tehát igen messze vagyunk a kritikus sebességtől, s így nem kell félnünk attól, hogy el kell távoznunk ismeretlen csillagvilágok felé, ahová való utunkban a megfagyás veszedelme fenyegetné az emberiséget!