Az első forduló feladataiból

1. *A pontból 45°-os szög alatt v kezdősebességgel elindított lövedék B pontot találna el. A B pontból lövedéket indíthatunk $2v$ kezdősebességgel. Az A pontból egyidőben indítva B ponttól milyen maximális távolságra lehet a második lövedéket lelőni?*

Magos András, a budapesti II. Rákóczi Ferenc gimnázium IV. o. tanulójának megoldása:

Ha az A pontból indított lövedék kezdősebessége v és a hajítási szög α, akkor a kezdő sebesség vízszintes összetevője

$$v_{Ax} = v \cdot \cos\alpha$$

függőleges összetevője

$$v_y = v \cdot \sin\alpha.$$

Esetünkben

$$v_{Ax} = v_y = \frac{v}{\sqrt{2}}.$$

A hajítási távolság

$$L = \frac{v^2}{g}.$$

A két lövedék összeütközéséhez szükséges, hogy mindkettő kezdősebességének függőleges összetevője egyenlő legyen. (Ekkor a repülés minden pillanatában egyenlő magasságban vannak.) Mivel a vízszintes és függőleges összetevők derékszöget zárnak be, a B pontból indított lövedék vízszintes sebességösszetevője

$$v_{Bx} = \sqrt{(2v)^2 - v_y^2} = \sqrt{\frac{7}{2}} \cdot v.$$

Találkozzék a két lövedék elindításuk után t másodperccel. A hajítási távolságot a két lövedék elmozdulása vízszintes irányú összetevőinek összege adja meg:

$$t \cdot v_{Ax} + t \cdot v_{Bx} = t \cdot \frac{v}{\sqrt{2}} + t \cdot \frac{v \cdot \sqrt{7}}{\sqrt{2}} = \frac{v^2}{g},$$

ebből

$$t = \frac{\sqrt{2} \cdot (\sqrt{7} - 1)}{6} \cdot \frac{v}{g}.$$

A B pontból indított lövedéknek az ütközésig vízszintes irányban megtett útja:

$$s_{Bx} = v_{Bx} t = \frac{\sqrt{7} \cdot (\sqrt{7} - 1)}{6} \cdot \frac{v^2}{g}.$$

A függőleges irányban megtett út

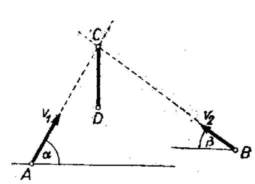
$$s_y = v_y \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2 = \frac{v^2 \cdot (4\sqrt{7} - 7)}{18g}.$$

Tehát az összeütközés pontjának B-től való távolsága:

$$x = \sqrt{s_{Bx}^2 + s_y^2} = 0{,}755\,\frac{v^2}{g}.$$

Vermes Miklós megjegyzése:

Ha a két lövedék egyszerre indul el, akkor a találkozásig függőlegesen mindegyik ugyanannyit esik le. Ezért mindkét lövedéknél eltekinthetünk a szabadesés törvénye szerint megtett függőleges távolságtól (mintha eső koordinátarendszerből figyelnénk a jelenséget). A-ból és B-ből α és β szögekkel egyeneseket rajzolunk és azt vizsgáljuk, hogy az ezeken v_1 és v_2 állandó sebességgel mozgó lövedékek milyen feltételek mellett találkoznak.



Ha megvan találkozásuk C pontja és t ideje, akkor függőlegesen le kell bocsátani a $CD = \frac{1}{2}gt^2$ távolságot, és D-ben megtaláljuk a találkozás tényleges helyét. Ez a módszer bárhonnan, bármilyen sebességgel és szöggel egyszerre indított lövedék esetében alkalmazható.

2. *0 C°-on egyenlő hosszúságú vékony sík réz- és invarlemezből bimetallt készítünk úgy, hogy a lemezek végig pontosan összeilljenek. Így a két lemez középvonalának távolsága $d = 0{,}5$ mm. A két lemez egyik végét rögzítjük, a másikra mutatót szerelünk. Mekkora hosszúságúra válasszuk 0 C°-on a lemezeket, hogy 10 C° hőmérsékletemelkedésnek a mutató 1°-kal való elfordulása feleljen meg? A réz vonalas hőkitágulási együtthatója $17\cdot10^{-6}$/C°, az invaré $1\cdot10^{-6}$/C°. A lemez elhajlása körívben történik.*

Magos András, a budapesti II. Rákóczi Ferenc gimnázium IV. o. tanulójának megoldása:

A mutató elfordulási szögét α-val jelöljük. Mivel a mutató az érintő irányába mutat, a szalag által meghatározott ívhez tartozó középponti szög és a mutató elfordulási szöge merőleges szárú szögek, tehát egyenlők. Ha az invar lemez középvonalához tartozó sugarat r-rel jelöljük, akkor a rézlemez középvonalához tartozó sugár: $r + 0{,}5$ mm.

Így a két középvonal hossza melegítés után:

$$i_i = \frac{2r\pi}{360} \quad \text{és} \quad i_r = \frac{2(r+0{,}5\ \text{mm})\,\pi}{360}.$$

A kettő különbsége:

$$i_r - i_i = \frac{\pi}{360}\,\text{mm}.$$

Ha a bimetall–szalag hossza 0 C°-on x, akkor 10 C°-os melegítéskor a rézszalag megnyúlása

$$l_r = 17\cdot10^{-5}\cdot x$$

az invar szalag megnyúlása

$$l_i = 10^{-5}\cdot x.$$

Mivel

$$i_r - i_i = l_r - l_i$$

azaz

$$\frac{\pi}{360}\,\text{mm} = 16\cdot10^{-5}\cdot x.$$

Ebből

$$x = 54{,}68\ \text{mm}.$$

A bimetall szalag hossza 0 C°-on 5,468 cm.

3a *Tengeralattjárót felderítő hadihajó tengeralatti hangforrással rendelkezik. A hajóhoz ismeretlen sebességgel tengeralattjáró közeledik, ugyanakkor pedig a hajó 70 km/óra sebességgel halad a tengeralattjáró felé. Mekkora a tengeralattjáró sebessége, ha a tengeralattjáróról visszaverődő hang frekvenciája a hajón levő felfogó készüléken 4%-kal magasabb a hajó által kiadott hang frekvenciájánál? A hang terjedési sebessége a vízben* 1500 m/sec.

Sólyom Jenő, a budapesti Vörösmarty Mihály gimnázium IV. o. tanulójának megoldása:

Meg kell vizsgálnunk a Doppler–hatást abban az esetben, amikor a hangleadó és a hangfelvevő is mozog, és közben a hang mozgó tárgyról verődik vissza.

1. A hajó f frekvenciájú hangot ad le, ennek hullámhossza $\lambda = \frac{c}{f}$ (c a hang terjedési sebessége a vízben) lenne, ha a hajó állna. A hajó azonban v_1 sebességgel halad, tehát a hullám rövidebb úton alakul ki. Az új hullámhossz (λ_1) $v_1\cdot T$-vel rövidebb, mint az eredeti:

$$\lambda_1 = \lambda - v_1\cdot T.$$

A frekvencia tehát

$$f_1 = f\frac{c}{c-v_1}.$$

2. Ha a tengeralattjáró állna, akkor egy másodperc alatt f_1 frekvenciát fogna fel. Mivel a tengeralattjáró v_2 sebességgel mozog a hajó felé, tehát a hangforrás felé, a tengeralattjárót $\frac{v_2}{\lambda_2}$-val több hullám éri, tehát a tengeralattjárón észlelt frekvencia:

$$f_2 = f\frac{c+v_2}{c-v_1}.$$

3. A tengeralattjáró ezt a frekvenciájú hangot veri vissza. De mivel a tengeralattjáró v_2 sebességgel halad a megfigyelő felé, az álló megfigyelő

$$f_3 = f\frac{c\cdot(c+v_2)}{(c-v_1)\cdot(c-v_2)}$$

frekvenciájú hangot észlelne.

4. De mivel az észlelő hajó v_1 sebességgel halad a hangforrás – jelen esetben a tengeralattjáró – felé, a hajón észlelt frekvencia:

$$f_4 = f\frac{(c+v_1)\cdot(c+v_2)}{(c-v_1)\cdot(c-v_2)}.$$

Ha a frekvencianövekedés 4%-os, akkor $f_4/f = 1{,}04$.

$$v_1 = 70\ \text{km/óra}$$
$$c = 1500\ \text{m/sec} = 5400\ \text{km/óra}$$

adatok helyettesítésével a tengeralattjáró sebessége

$$v_2 = 35{,}9\ \text{km/óra} \sim 36\ \text{km/óra}.$$

Kísérlet

Tartsd a tenyeredet néhány *cm*-re asztali villanylámpa körtéje elé. Gyújtsd meg a lámpát. Amikor a tenyereden már „jól" érzed a lámpa melegét, oltsd el a lámpát. Fogd meg a lámpa körtéjét. Azt teljesen hidegnek találod. Mivel magyarázod a jelenséget?

Közli: *Párkányi László*