I. megoldás. Megkeressük (1) összes gyökeit, és mindegyikre megvizsgáljuk, gyök-e a 2-szerese is, vagyis teljesül-e a módosított egyenlet:

$$\cos 2x + \cos 4x + \cos 8x = 0. \tag{2}$$

(1) bal oldalán az utolsó két tag összegét szorzattá alakítva

$$\cos x + \cos 2x + \cos 4x = \cos x + 2\cos x \cos 3x = \cos x(1 + 2\cos 3x) = 0,$$

eszerint (1) gyökei (fok egységekben):

$\cos x = 0$-ból $x_{1,2} = 90^\circ + k \cdot 180^\circ$, továbbá

$1 + 2\cos 3x = 0$, azaz

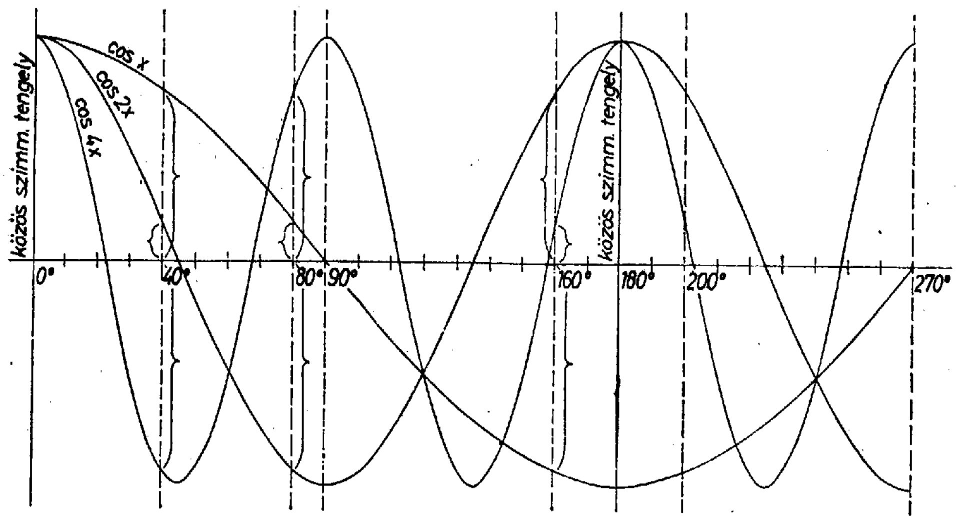
$$\cos 3x = -\frac{1}{2}\text{ből} \qquad 3x = \begin{cases} 120^\circ + k\cdot 360^\circ, \\ 240^\circ + k \cdot 360^\circ, \end{cases}$$

$$x_{3,4,5} = 40^\circ + k \cdot 120^\circ, \quad x_{6,7,8} = 80^\circ + k \cdot 120^\circ.$$

A $(0^\circ,\ 720^\circ)$ intervallumba eső gyökök tehát:

$$\begin{array}{cccccccc} 40^\circ, & 80^\circ, & 90^\circ, & 160^\circ, & 200^\circ, & 270^\circ, & 280^\circ, & 320^\circ, \\ 400^\circ, & 440^\circ, & 450^\circ, & 520^\circ, & 560^\circ, & 630^\circ, & 640^\circ, & 680^\circ. \end{array}$$

Már innen látjuk, hogy $x_{1,2}$-re nem igaz az állítás, $180^\circ, 540^\circ$ nem szerepel, és valóban, $(2x_1 =)180^\circ$ és $(2x_2 =)540^\circ$ esetén (2) bal oldala $+1$. Azt sejtjük viszont, hogy minden további gyökre helyes az állítás.



Valóban,

$$2x_{3,4,5} = 80^\circ + (2k)\cdot 120^\circ,$$

ami mindig benne van az $x_{6,7,8}$ alakban, másrészt hasonlóan

$$2x_{6,7,8} = 160^\circ + 2k \cdot 120^\circ = 40^\circ + (2k+1)\cdot 120^\circ,$$

ezt pedig az $x_{3,4,5}$ alak tartalmazza. Ezzel szemben $2x_{1,2} = (2k+1)\cdot 180^\circ$ nem gyök. – Ezzel a kívánt vizsgálatot befejeztük.

Gerhardt Tamás (Budapest, Kaffka Margit Gimn., III. o. t.)
Szalontai Árpád (Budapest, Berzsenyi D. Gimn., II. o. t.)

II. megoldás. Az (1) egyenlet teljes megoldása nélkül adjuk meg a választ a kérdésre. Az 1575. feladat[1]

[1]K. M. L. 37 (1968) 120. o. $C_n = 2\cos nx$ a $C_1 = C = 2\cos x$-nek az az n-edfokú, csökkenő hatványok szerint rendezett polinomja, melyben C^n együtthatója 1, a további tagokban a kitevő 2 egységenként csökken, az egymás utáni együtthatók az (1*) táblázat n indexű sorából vehetők ki, és a táblázat a (2*) séma szerint fejleszthető tovább, ahol $a = b - c$ (miután kész sor utolsó száma után 0-t írtunk).

n					
1	1				
2	1	-2			
3	1	-3			
4	1	-4	2		
5	1	-5	5		
6	1	-6	9	-2	
7	1	-7	14	-7	
8	1	-8	20	-16	2

(1*)

c	
	b
	a

(2*)

(1) táblázatát (az $n = 8$-hoz tartozó sorral való kiegészítés után) felhasználva $2\cos x = C$ polinomjává alakítjuk (1) bal oldalának 2-szeresét, és azt a kifejezést is, ami belőle adódik, x helyére $2x$-et írva:

(1a) $$2\cos x + 2\cos 2x + 2\cos 4x = C + (C^2 - 2) + (C^4 - 4C^2 + 2) = C(C^3 - 3C + 1),$$

(2a) $$2\cos 2x + 2\cos 4x + 2\cos 8x = (C^2 - 2) + (C^4 - 4C^2 + 2) + (C^8 - 8C^6 + 20C^4 - 16C^2 + 2) = C^8 - 8C^6 + 21C^4 - 19C^2 + 2.$$

Az első polinom C tényezője a második polinomnak nem tényezője. Eszerint $C = 0$, vagyis $x_1 = 90° + k \cdot 180°$ esetén (1a) és vele (1) bal oldala 0, x_1 gyök, (2a) értéke viszont $2(\neq 0)$, tehát x_1 a módosított egyenletnek nem gyöke.

Polinom-osztás útján kapjuk, hogy (2a) jobb oldala többszöröse az (1a) jobb oldalán álló háromtagúnak:

$$C^8 - 8C^6 + 21C^4 - 19C^2 + 2 = (C^3 - 3C + 1)(C^5 - 5C^3 - C^2 + 6C + 2),$$

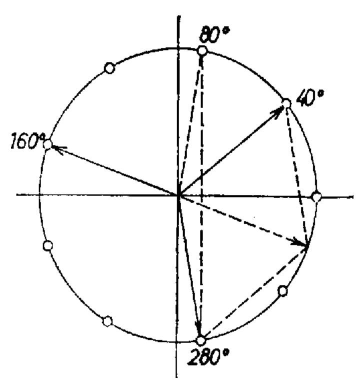
eszerint minden további olyan C esetében, amelyre (1a) jobb oldala 0, vagyis $x_2 = \arccos(\mathrm{C}/2)$ gyöke (1)-nek, a (2a) jobb oldala is 0, tehát x_2 a módosított egyenletnek is gyöke. Legalább egy ilyen gyök van, mert $C = -2$ esetén $C^3 - 3C + 1 = -1, < 0, C = 2$ esetén pedig $+3, > 0$, a megfelelő grafikon legalább egy helyen átmetszi az x tengelyt.

A kérdéses állítás tehát bizonyos gyökökre igaz, másokra nem igaz.

III. megoldás. Könnyű észrevenni, hogy $x = \pm 90°$ az (1)-nek gyöke, a (2)-nek nem, van tehát olyan gyök, amelyre az állítás nem igaz. Megmutatjuk viszont, hogy olyan gyök is van, amelyre (2) is teljesül, vagyis amelyre az állítás igaz. Az ilyen gyökre (1) és (2) kivonásával mindenesetre

$$\cos x = \cos 8x,$$

tehát csak $8x - x = 7x = k \cdot 360°$ és $8x - x = 9x = k \cdot 360°$ megoldásairól lehet szó, amennyiben kielégítik (1)-et.



Az utóbbiból adódó $x = 40°$ esetén (1) bal oldala $\cos 40° + \cos 80° + \cos 160° = \cos 40° + \cos 280° + \cos 160°$, az egységkörnek a $40°, 160°$ és $280°$ irányszögű pontjaihoz tartozó helyvektorok x koordinátáiból képezett összeg[2], más szóval a vektorok összegének x-koordinátája. Ámde a 3 vektor összege 0, mert mindegyikük egységvektor, és bármelyik kettő közötti szög $120°$, így (1) bal oldala 0. Ugyanígy $\cos 80° + \cos 160° + \cos 320° = \cos 80° + \cos 200° + \cos 320° = 0$. ($x = 120°$ esetén $2x = 240°, 4x = 120° + 360°$, és nem találunk a fentiekhez hasonló tükrözést.)

[2]Nem okoz zavart, hogy x-nek itt kétféle jelentése van.