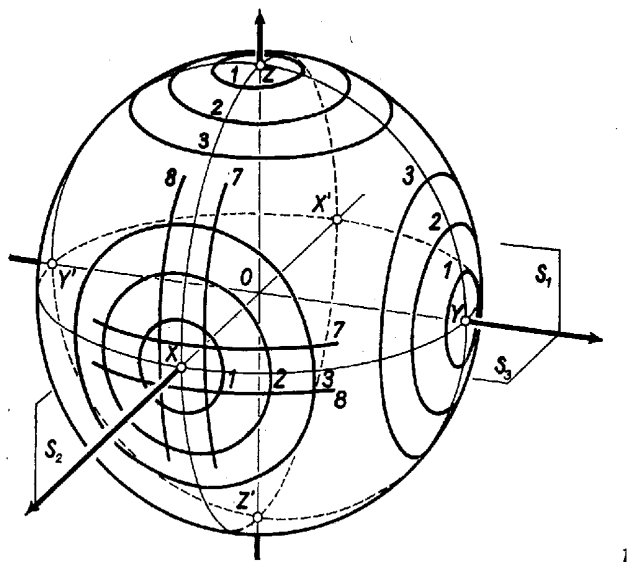
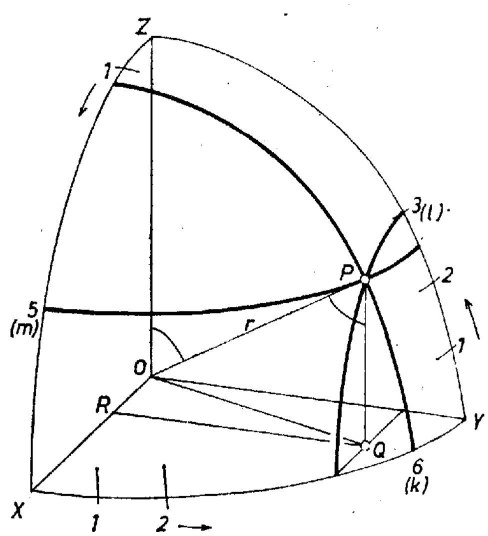
I. megoldás. Az XX' átmérőn átmenő fél-főkörre az $\alpha = 180^\circ/15 = 12^\circ$-os szög többszöröseit kell felmérnünk. A kapott osztópontok szimmetrikusak az XX' átmérőre merőleges, O-n átmenő S_1 síkra, így a belőlük származtatott körök is szimmetrikusak S_1-re (1. ábra).



1. ábra

Hasonlóan szimmetrikusak az YY', ZZ' tengelyekhez tartozó körök a tengelyekre merőleges S_2, ill. S_3 síkra. Ez a három sík a teret és a gömböt 8 részre vágja fel, a fenti szimmetria miatt elegendő e részek egyikét megvizsgálni, az itt talált metszéspontoknak az összes többiben megtaláljuk a megfelelőit a határoló síkokra való tükrözés útján.

Tegyük fel, hogy a megrajzolt körök közül három megy át a gömb választott nyolcadának valamely P pontján. Tartozzék ez a három kör rendre az α szög k-, l-, m- szereséhez, ahol feltevésünk szerint k, l, m 1 és 7 közötti egész számok.



2. ábra

Legyen P vetülete az S_3 síkon Q, az OPQ derékszögű háromszögben $OPQ\sphericalangle = POZ\sphericalangle = m\alpha$, emiatt (2. ábra)

$$PQ = r\cos m\alpha,$$

ahol r a G gömb sugara. Hasonlóan

$$QR = r\cos l\alpha, \qquad OR = r\cos k\alpha,$$

ahol R a Q pontnak az XX' egyenesen levő vetülete. Az OQR, OQP derékszögű háromszögekben

$$OP^2 = OQ^2 + QP^2 = OR^2 + RQ^2 + QP^2,$$

tehát

$$\cos^2 k\alpha + \cos^2 l\alpha + \cos^2 m\alpha = 1. \tag{1}$$

Ezek szerint meg kell keresnünk az (1) egyenlet gyökeit. Ennek érdekében meghatározzuk az α szög többszöröseinek a cosinusát, illetve a

$$\cos^2 \beta = (\cos 2\beta + 1)/2$$

összefüggés alapján a 2-szeresük cosinusából közvetlenül e cosinusok négyzetét, a táblázat alapján:

β	12°	24°	36°	48°	60°	72°	84°
$\cos^2\beta$	0,9568	0,8346	0,6545	0,4477	0,2500	0,0955	0,0109

Ha az (1)-ben szereplő három szög közül a legkisebb 12°-os volna, akkor a másik két cosinus négyzetösszegének

$$1 - 0{,}9568 = 0{,}0432$$

-nek kellene lennie, e szögek tehát csak 84°-osak lehetnének, mert cosinus-négyzetük külön-külön legfeljebb 0,0432; így látnivalóan nem kapunk gyököt.

Ha a legkisebb szög 24°-os, a másik két szögre jutó maradék 0,1654, csak 72°-os és 84°-os szögek jöhetnének szóba, ismét nincs megoldás.

Ha a legkisebb szög 36°-os, a maradék 0,3455, így 60°-os, 72°-os, 84°-os szögek szerepelhetnek még: az első kettő cosinusa négyzetének összege épp 0,3455.

Ha a legkisebb szög 48°-os, a maradék 0, 5523, így 48°-os, 60°-os, 72°-os, 84°-os lehet a másik kettő: egy 48°-os és egy 72°-os majdnem egfelel, az összeg 0,5432, tehát a hozzájuk tartozó három kör csak megközelíti egymást. Végül ha a legkisebb szög 60°-os, akkor a cosinus-négyzetek összege legfeljebb $3 \cdot 0{,}25 = 0{,}75$, (1)-nek nincs ilyen megoldása.

A kapott 36°-os, 60°-os, 72°-os szöghármas valóban gyöke (1)-nek (és nem csak a táblázatunk pontosságáig elégítik ki azt), hiszen

$$\cos^2 60° = \frac{1}{4},$$

$$\cos^2 36° = \frac{\cos 72° + 1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}+3}{8},$$

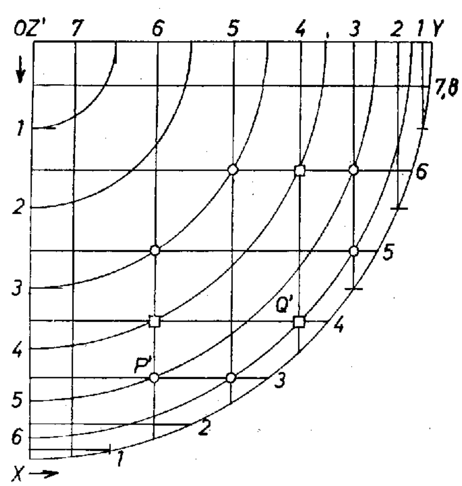
$$\cos^2 72° = \frac{\cos 144° + 1}{2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3-\sqrt{5}}{8},$$

és ezek összege valóban 1. E szöghármasnak a választott nyolcadban 6 pont felel meg, hiszen a 3, 5, 6 szorzószámokat 6-féle sorrendben feleltethetjük meg a k, l, m változóknak. Ennek a 6 pontnak az összes többi nyolcadban van megfelelője, összesen tehát 48 pont van, melyen a megrajzoltak közül 3 kör megy át.

A második kérdésre térve, nem találtunk metszést az olyan körökön, amelyek a 12°-nak 1-, 2-, 4-, ill. 7-szereséhez tartoznak, így az ilyen körök száma a szimmetriák figyelembevételével $4 \cdot 2 \cdot 3 = 24$.

Somorjai Gábor (Budapest, I. István Gimn., III. o. t.)
Donga György (Budapest, Berzsenyi D. Gimn., II. o. t.)

II. megoldás. Könnyű megrajzolni a köreinkből az XYZ gömbháromszögbe eső íveknek pl. az $XOY = S_3$ síkon levő vetületét, hiszen az első két körrendszert kimetsző síkok erre merőlegesek, és így a megfelelő negyedkörívek vetületei az OX, ill. OY sugárra merőleges fél-húrok; a 3. körrendszert kimetsző síkok pedig párhuzamosak S_3-mal, ezért mindegyik ilyen kör vetülete vele egybevágó, O középpontú kör (3. ábra).



3. ábra

Ha van a gömb felületén hármas metszéspont, annak vetületén 3 kör vetülete megy át, éspedig mindhárom körrendszer 1–1 körének vetülete.

A rajz szerint 6 ponton látszik átmenni 3–3 kör vetülete. Bebizonyítjuk, hogy ezek a gömbfelület olyan pontjainak vetületei, amelyeken valóban 3 kör megy át. Ezt egyetlen számítás bizonyítja, mert a pontok mindegyike az egyik körrendszer 3. körének, egy másik körrendszer 5. és a harmadik rendszer 6. körének vetületén látszik. Így pl. a XX'-re merőleges 3. és az YY'-re merőleges 6. kör vetületei közös P' pontjának OY-tól, ill. OX-től mért távolsága $\cos 3\cdot 12^\circ = \cos 36^\circ = \dfrac{\sqrt5+1}{4}$ ill. $\cos 72^\circ = \dfrac{\sqrt5-1}{4}$, és – mint az ezek négyzetösszegéből vont négyzetgyök –

$$OP' = \sqrt{\frac{\left(6+2\sqrt5\right)+\left(6-2\sqrt5\right)}{16}} = \frac{\sqrt3}{2} = \sin 5\cdot 12^\circ.$$

Ez pedig a ZZ'-re merőleges körrendszer 5. körének sugara, ami állításunkat igazolja.

Az ilyen pontok száma valóban 6, ahányféle sorrendben a körök 3., 5. és 6. sorszámait az OX, OY, OZ tengelyű körrendszerhez hozzárendelhetjük:

$$(3,\ 5,\ 6),\quad (3,\ 6,\ 5),\quad (5,\ 3,\ 6),\quad (5,\ 6,\ 3),\quad (6,\ 3,\ 5),\quad (6,\ 5,\ 3).$$

További 3 esetben 3 vetület csak közel halad egymáshoz: két körrendszer 4. és a harmadik rendszer 6. körének vetülete. Valóban $\cos 4\cdot 12^\circ = \cos(30^\circ + 18^\circ)$, ehhez

$$\cos 18^\circ = \sqrt{\frac{10+2\sqrt5}{4}},\ \sin 18^\circ = \frac{\sqrt5-1}{4},\ \text{így}$$

$$\cos 48^\circ = \frac18\left(\sqrt{30+6\sqrt5}-\sqrt5+1\right),$$

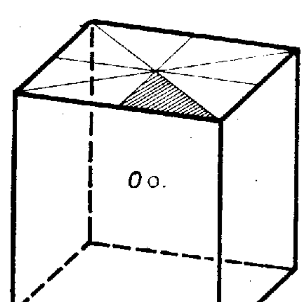
de a fentiekhez hasonlóan az első két körből adódó négyzetösszeg négyzetgyöke

$$\sqrt{2\cos^2 48^\circ} = \sqrt2\cos 48^\circ \neq \sin 6\cdot 12^\circ = \frac{\sqrt{10+2\sqrt5}}{4}.$$

(A két oldal eltérése 3 tizedesre kerekítve 0,005).

Ezek szerint a gömbfelület $8\cdot 6 = 48$ pontján megy át $3-3$ kör; másrészt fordítva mindegyik körrendszer elölről és hátulról számított 3., 5. és 6. körén van, a további 8 körén nincs 3-as metszéspont, tehát a megrajzolt, de 3-as metszéspontot nem tartalmazó körök száma 24.

Megjegyzés. Tulajdonképpen elég lett volna vizsgálni az XYZ gömb-háromszög 1/6 részét, miután mindegyik csúcsában megrajzoltuk a szögfelező főkört – amit pl. a Z csúcsban az XOZ és YOZ síkok közti szög felezősíkja metsz ki –, és így a gömbháromszöget 6 egybevágó gömbháromszögre osztottuk. Valóban, véve egy olyan, O középpontú K kockát, melynek élei párhuzamosak XX'-vel, YY'-vel, ZZ'-vel, minden olyan szimmetriaművelet, amely K-t önmagába viszi át, ugyanezt teszi 42 körünk együttesével. Márpedig a 4. ábrabeli kockán megjelölt háromszögből – ami a felület 1/48 része – szimmetriákkal az egész kockafelület megkapható.



4. ábra