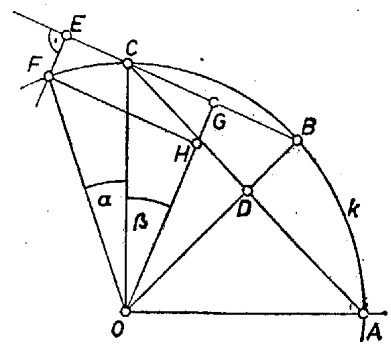
I. A leírt szerkesztés körzővel és egyenes vonalzóval elvégezhető, ezért a leírás szerinti 1. ábra bármelyik szakasza és bármelyik szögének bármelyik szögfüggvénye – mint egy legföljebb másodfokú egyenlet gyöke – a négy alapművelettel és négyzetgyökvonással tetszés szerinti pontossággal kiszámítható, miután egy hosszegységet is választottunk. Legyen $OA = 1$.



1. ábra

Így a probléma az, hogy táblázatunk 4 tizedes jegyre kerekített, vagyis kerekítési hibával terhelt adatai alapján mekkora hibával kereshetjük vissza a kérdéses szögnek vagy valamely kifejezésének egy („pontosan” ismert) szögfüggvényértékét, továbbá hogy a különböző ilyen visszakeresések közül melyikből kapjuk a kérdéses szöget kisebb hibával. Hibán azt a legnagyobb lehetséges eltérést értjük, ami a szög valódi értéke és a táblázatból *lineáris interpoláció útján* kapott közelítő értéke között adódhat. (Azzal a kérdéssel már nem foglalkozhatunk tehát, mekkora hibát okoz a lineáris interpoláció elve, hogy ti. pl. a sin x függvény grafikonját a táblázat alapján felrajzolt pontok között egyenesszakaszokkal, azaz elsőfokú függvények darabjaival pótoljuk.)

II. Legyen O vetülete BC-re a G pont, F vetülete OG-re H, és a kérdéses szög $COF\sphericalangle = \alpha$ (az állítás szerint közelítőleg 20°). Igen könnyű $\sin(\alpha + 22{,}5^\circ)$ meghatározása. Ugyanis nyilvánvalóan $BOC\sphericalangle = 45^\circ$, $COG\sphericalangle = \beta = 22{,}5^\circ$, és

$$\sin HOF\sphericalangle = \sin(\alpha+\beta) = \frac{HF}{OF} = HF = GE = GC + CE =$$

$$\sin\beta + DB = \sin\frac{45^\circ}{2} + (1 - \cos 45^\circ) =$$

$$= 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} = 0{,}675\ 576\ 6\ldots \tag{1}$$

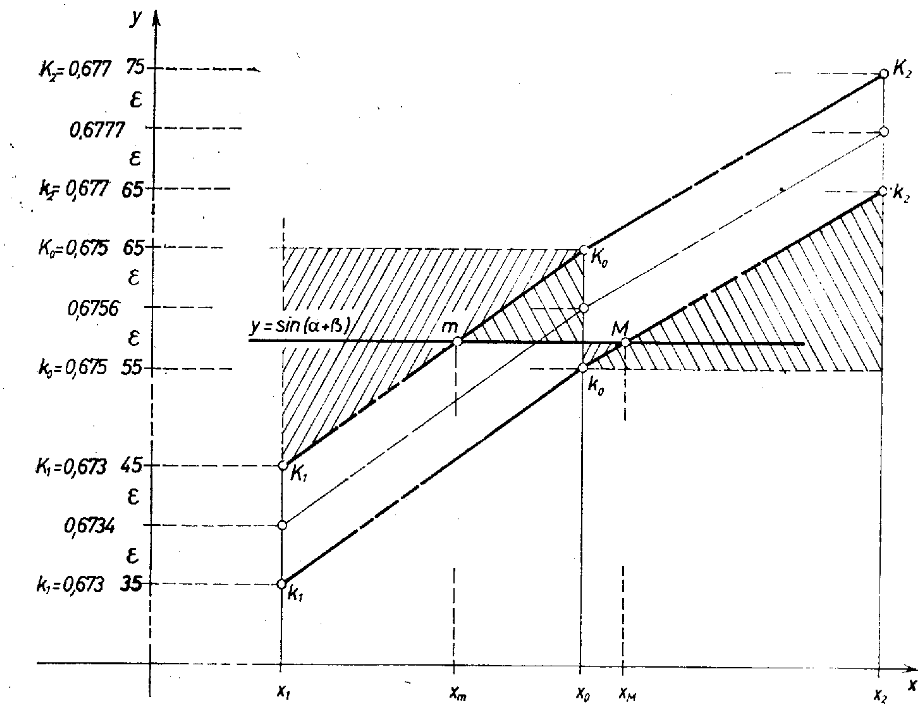
($\sqrt{2}$ tizedes alakú közelítő törtjét 10 tizedesre számítottuk ki, ez bőven elegendő (sőt sok is) ahhoz, hogy a második négyzetgyök 8-ik tizedesjegyét és $\sin HOF\sphericalangle$ fenti 7 tizedesjegyét még biztosan megadhassuk; a számítást nem részletezzük.)

Mármost a táblázat szerint $\sin 42^\circ\ 30' = 0{,}6756$, a kerekítés okozta hiba abszolút értéke nem nagyobb, mint $\varepsilon = 0{,}5 \cdot 10^{-4}$, így $\sin 42^\circ\ 30'$ a következő korlátok közé zárható:

$$k_0 = 0{,}675\ 55 \leqq \sin 42^\circ\ 30' \leqq 0{,}675\ 65 = K_0.$$

$\sin(\alpha+\beta)$ fent kiszámított értéke két korlát közé esik, eszerint $\alpha+\beta$ nagyobb is, kisebb is lehet, mint $x_0 = 42^\circ\ 30'$.

A sinus-táblázat szomszédos adatai az $x_1 = 42^\circ\ 20'$ és $x_2 = 42^\circ\ 40'$ helyeken 0,6734, ill. 0,6777, hibájuk ugyancsak legföljebb ε, így alsó és felső korlátjuk, k_1, K_1, ill. k_2, K_2 hasonlóan képezhető. Ezek szerint sin x-et az $(x_1,\ x_2)$ intervallumban interpoláló két elsőfokú függvény-darab grafikonja abban a két paralelogrammából álló sávban halad, amelyet a 2. ábra vázol (a jobb áttekintés érdekében torzítva). Bárhol van ugyanis a $\sin x_1$ és $\sin x_0$ pontos értékét ábrázoló pont a k_1K_1, ill. k_0K_0 szakaszon, az ezeket összekötő szakasz mindenesetre benne van a $k_1k_0K_0K_1$ négyszögben. (A korlátokat ábrázoló pontokat – a megfelelő abszcisszájú egyenesen – ugyanúgy jelöltük, mint a korlátokat.)



2. ábra

Messe a visszakeresendő értéket ábrázoló $y = \sin(\alpha + \beta)$ egyenes a sáv határait az m, M pontokban. Ekkor a sin $(\alpha + \beta)$ értéket valamely olyan x helyen veszi fel a $\sin x$-et interpoláló mondott függvény, mely a grafikon x tengelyén az mM szakasz vetületére, az x_m és x_M abszcisszák közé esik. Így x_m lesz $\alpha + \beta$ alsó korlátja, x_M pedig a felső korlátja.

Mármost az (x_1, x_0) intervallumban $10'$ növekedésre az interpoláló függvény növekedése 0,0022 és persze ugyanennyi a $K_0 - K_1 = k_0 - k_1$ növekedés is. Másrészt $K_0 - \sin\,(\alpha + \beta) < 0,000\,074$, ezért a vonalkázott hasonló háromszögpár alapján

(2) $$x_0 - x_m < 10' \cdot \frac{0{,}000\,074}{0{,}0022} < 21'',$$

és hasonlóan az $(x_0,\, x_2)$ intervallumból

$$x_M - x_0 < 10' \cdot \frac{0{,}000\,027}{0{,}0021} < 8'',$$

ennélfogva

$42^\circ\ 29'\ 39'' < \alpha + \beta < 42^\circ\ 30'\ 8''$,

$19^\circ\ 59'\ 39'' < \alpha < 20^\circ\ 0'\ 8''$.

Amennyiben egyetlen korláttal akarjuk jellemezni, milyen mértékben közelíti α a 20°-os szöget, akkor eredményünk: $|\alpha - 20^\circ| < 21''$.

Megjegyzések. 1. Könnyű belátni, hogy az α-ra számítandó hibakorlát csak attól függ, hogy a visszakeresésben a függvényt ábrázoló görbe milyen meredek szakaszát használjuk. Pl. (1) alapján $\cos(\alpha + \beta)$-t kiszámítva

$$\sin\alpha = \sin(\alpha + \beta)\cos\beta - \cos(\alpha + \beta)\sin\beta$$

is számítható, ezt a fentihez hasonlóan visszakeresve kisebb hibakorlátot kapnánk, mert 20° környezetében a $\sin x$ függvény grafikonja meredekebb, $10'$-re eső növekedése 0,0027.

Csökkenthetnők a hibakorlátot pl. tg $(\alpha + \beta)$ alapján való hasonló visszakereséssel is. Azonban a visszakeresendő érték „pontos" (a táblázat kerekítésénél jóval kisebb hibájú) meghatározása egyre több számolással járna.

2. 7 tizedes jegyre $\sin 42^\circ\ 30' = 0{,}675\,5902$, tehát hiánnyal közelítjük $42^\circ\ 30'$-et, ebben a környezetben $\sin x$-nek $1'$-re eső növekedése $2145 \cdot 10^{-7}$, és végül $\alpha = 19^\circ\ 59'\ 56{,}2''$.

3. A régebbi, $0{,}1^\circ = 6'$ lépéshosszú iskolai táblázatban a sin $42^\circ\ 30'$ adattól szomszédai, $\sin 42^\circ\ 24'$ és $\sin 42^\circ\ 36'$ egyaránt $13 \cdot 10^{-4}$-nel térnek el, ezekből $x_0 - x_m < 21''$ és $x_M - x_0 < 9''$ adódik.

4. A fenti második négyzetgyökvonás alapja irracionális szám, azonban tetszés szerinti számú tizedes jegye meghatározható, így ugyanez áll négyzetgyökére is. A kitűzésbeli zárójeles megjegyzés tehát élesíthető volna. Ezzel csak arra kívánta felhívni a szerkesztőség a megoldók figyelmét, hogy $\cos 45^\circ$ és $\sin 22{,}5^\circ$ értékét ne a táblázatból vegyék. Ha

ezeknek is a kerekített értékét használnók, akkor (1) szerint $0{,}6755 < \sin(\alpha + \beta) < 0{,}6757$, a 2. ábra egyenese helyére egy 0,0002 széles sáv lépne, melynek tengelye az $y = 0{,}6756$ egyenes, és (2)-helyére a következő számítás lépne

$$x_0 - x_m < 10' \cdot \frac{0{,}000\,15}{0{,}0022} < 41'',$$

és ugyanennyi lenne $x_M - x_0$ felső korlátja is.