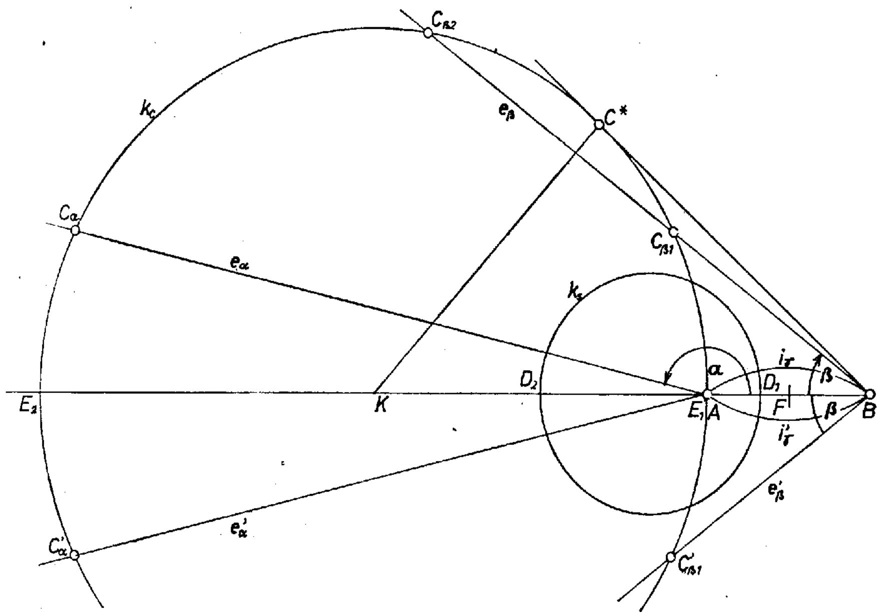
a) Jelöljük a háromszög adott helyzetű csúcsait A és B-vel, a belőlük induló súlyvonalakat s_a, s_b-vel. Ezek aránya $s_a : s_b = 1 : 2 = q$. Ezek mértani helyet adnak az S súlypontra, továbbá a harmadik csúcsra, C-re.



Ugyanis S harmadoló tulajdonsága folytán az $SA = 2s_a/3$ és $SB = 2s_b/3$ távolságok aránya szintén q, így S csak az A, B alappontokhoz és a q aránymutatóhoz tartozó k_s Apollóniosz-körön lehet.[1] Ennek az AB egyenesen levő átmérője az a szakasz, melynek végpontjai az AB távolság A-hoz közelebbi D_1 harmadolópontja és B-nek A-ra vonatkozó D_2 tükörképe.

Másrészt C – a belőle kiinduló súlyvonal révén – mindig az S képe abban a centrális hasonlóságban, melynek középpontja az AB szakasz F felezőpontja, aránymutatója pedig 3, ezért C csak azon a k_c körön lehet, amely k_s-nek képe a mondott transzformációban. Ennek középpontja ugyancsak az AB egyenesen van, átmérőjének E_1, E_2 végpontjaira $FE_1 = 3 \cdot FD_1 = AB/2$, és FE_1 iránya ugyanaz, mint FD_1 iránya, tehát E_1 azonos A-val, másrészt $FE_2 = 3FD_2 = 9AB/2$, így k_c-nek K középpontjára nézve, $FK = (FE_1 + FE_2)/2 = 5AB/2$, vagyis K az A pont tükörképe D_2-re nézve, és k_c sugara $(FE_2 - FE_1)/2 = 2AB$.

b) Második mértani helyet ad C-re a háromszög adott szögének nagysága. Ez α, β, γ mindegyike lehet. Az első két esetben C mértani helye az A (ill. B) csúcsú és az AB (ill. BA) félegyenessel α (ill. β) szöget bezáró félegyenes és ennek az AB tengelyre való tükörképe (az ábrán példaképpen feltüntettünk egy e_α, e'_α és egy – tőle természetesen független – e_β e'_β félegyenespárt). Ha pedig a szög-adat γ, akkor C mértani helye az AB szakasz γ nyílású látószögkörívpárja, i_γ i'_γ.

A C csúcs megfelelő helyzeteit a feladat mindhárom változatában az utóbbi mértani helynek k_c-vel közös pontjai adják. A szerkesztések helyessége nyilvánvaló.

A megoldások száma:

I. adott $\alpha > 90^\circ$ esetén 2, $\alpha \leqq 90^\circ$ esetén 0;

II. adott $\gamma < 90^\circ$ esetén 2, $\gamma \geqq 90^\circ$ esetén 0 (az ábra i_γ, i'_γ-je esetén nincs megoldás),

III. adott $\beta < KBC^* \sphericalangle = 41^\circ\ 48'$ esetén 4,
$\beta = 41^\circ\ 48'$ esetén 2,
$\beta > 41^\circ\ 48'$ esetén 0,

a határszög, e_β és k_c érintkezése esetére, a KBC^* derékszögű háromszögből adódott, a fentiek szerint $\sin KBC^* \sphericalangle = 2/3$.

Divinyi Sándor (Budapest, I. István Gimn., III. o. t.)

[1] Lásd legutóbb az 1192. gyakorlatban, K. M. L. 39 (1969) 17. o.