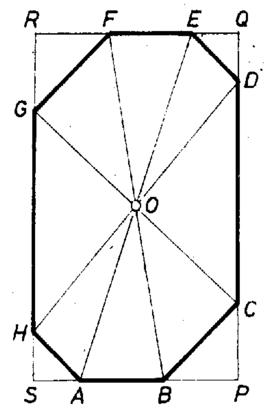
a) Legyen egy a feltevéseket teljesítő nyolcszög $ABCDEFGH = N$, vagyis mindegyik szöge $135°$. Az AB, CD egyenesek metszéspontját P-vel jelölve BCP egyenlő szárú derékszögű háromszög, mert B-nél és C-nél levő szöge, mint N-nek külső szöge, $45°$, így a $BPC\sphericalangle$ derékszög, $CD \perp AB$. Ugyanígy $CD \perp EF \perp GH$, ez a négy egyenes egy $PQRS$ téglalapot határol (1. ábra).



1. ábra

Ezek alapján

$$SP = SA + AB + BP = \frac{HA}{\sqrt{2}} + AB + \frac{BC}{\sqrt{2}},$$
$$RQ = RF + FE + EQ = \frac{GF}{\sqrt{2}} + FE + \frac{ED}{\sqrt{2}},$$

és ezek egyenlőségéből, kellő rendezéssel

$$AB - FE = \frac{1}{\sqrt{2}}(GF + ED - HA - BC).$$

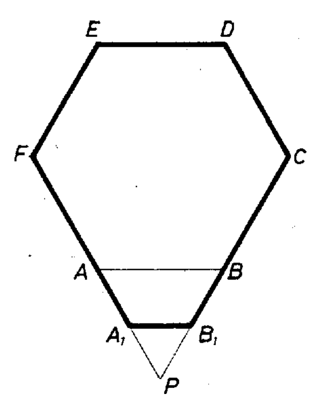
Itt a bal oldal egész szám, és egész a jobb oldali zárójel értéke is. Ez csak úgy lehetséges, ha mindkét oldal 0. Ha ugyanis egyik nem az, akkor a másik sem, így pedig $\sqrt{2}$ egyenlő volna a zárójeles kifejezés és a bal oldal hányadosával, ami racionális szám, holott $\sqrt{2}$ irracionális szám.

Eszerint $AB = FE$, s mivel még párhuzamosak is, $ABEF$ paralelogramma, azért átlói, AE és BF felezik egymást az O metszéspontjukban, más szóval az A, E, valamint B, F csúcs-párok egymás tükörképei O-ra nézve.

Ugyanígy $BC \sharp FG$, ezért BF felezőpontja – az O pont – felezi CG-t is, másrészt $AH \sharp ED$ alapján O – mint AE felezőpontja – a DH átlót is felezi, tehát N kerületének $EFGHA$ és $ABCDE$ részei egymás tükörképei O-ra nézve. Ezt kellett bizonyítanunk.

b) Példát mutatunk egész oldalú, egyenlő szögű és centrálisan nem szimmetrikus hatszögre és 12-szögre, ezek mutatják, hogy a nyolcszögre vonatkozó állítás megfelelője hatszögre és 12-szögre nem érvényes.

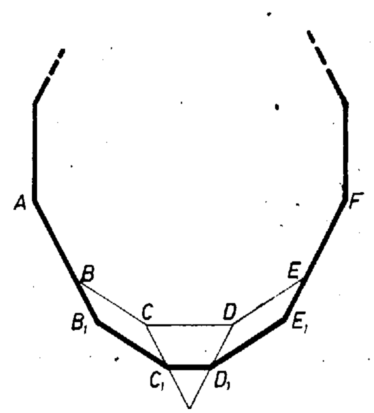
Messe egymást a 2 egységnyi oldalú $ABCDEF$ szabályos hatszög FA és CB oldalegyenese P-ben, és legyen az ABP szabályos háromszög AB-vel párhuzamos és egyirányú középvonala A_1B_1 (2. ábra).



2. ábra

Ekkor az A_1B_1CDEF hatszög mindegyik szöge $120°$, és egymás utáni oldalainak hossza rendre 1, 3, 2, 2, 2, 3, a szemben fekvő oldalpárok különbözők, az idom nem centrálszimmetrikus.

Legyen másrészt a 2 egységnyi oldalú szabályos 12-szög 5 egymás utáni oldalából álló törött vonal $ABCDEF$ (3. ábra), a CD oldal fölé kifelé írt szabályos háromszögnek CD-vel párhuzamos és egyirányú középvonala C_1D_1, a C_1CB és a D_1DE háromszöget ebben a körüljárásban paralelogrammává kiegészítő pont B_1, ill. E_1.



3. ábra

Könnyű belátni, hogy ez rajta van az AB, ill. FE oldal meghosszabbításán, így a 12-szög kerületének mondott részét $AB_1C_1D_1E_1F$-fel pótolva megfelelő ellenpéldát adtunk: a szögek egyenlők a megfelelő eredeti oldalak szögével, tehát egymással is, az oldalak hosszai 3, 2, 1, 2, 3, és nyilvánvalóan nem áll fenn centrális szimmetria.

Harmat Péter (Mosonmagyaróvár, Kossuth L. Gimn., III. o. t.)