Haladók (II. osztályosok) *versenye*

1. feladat *Egy szám két olyan tényezőre bontható, melyek különbsége* 6, *negyedik hatványaik összege* 272. *Melyik ez a szám?*

I. megoldás: Ha a kisebbik tényezőt x-szel jelöljük, akkor a másik tényező $x+6$, és a követelmény szerint

$$x^4+(x+6)^4=272. \tag{1}$$

Szimmetrikusabbá válik azonban egyenletünk, ha a tényezők számtani közepét választjuk ismeretlennek. Ezt z-vel jelölve a két tényező $z-3$ és $z+3$, így

$$(z-3)^4+(z+3)^4=272,$$

és rendezve z páratlan kitevős hatványai kiesnek:

$$z^4+54z^2-55=0,$$

vagyis z^2-ben másodfokú egyenletre jutunk. Ennek gyökei $z^2_{1,2}=1$-ből $z_1=1$ és $z_2=-1$, a másik, $z^2_{3,4}=-55$ gyökből z_3 és z_4-re nem kapunk valós értéket. A z_1 gyökhöz tartozó tényezőpár -2 és $+4$, a z_2-höz tartozó -4 és $+2$, a szorzat mindkét esetben -8, ez az egyetlen (valós) szám, amely feladatunk követelményeinek megfelelhet. Valóban $(-2)^4+4^4=(-4)^4+2^4=272$.

II. megoldás: Jelöljük a keresett számot n-nel, a feladat szerinti tényezőit x-szel és y-nal. Ekkor, feltéve, hogy $x>y$,

$$x-y=6, \tag{2}$$

$$xy=n, \tag{3}$$

$$x^4-y^4=272. \tag{4}$$

Innen közvetlenül n-re is kaphatunk egyenletet, ha (3)-at és (4)-et $x(-y)=-n$, $x^4+(-y)^4=272$ alakban írva észrevesszük, hogy egyenleteink bal oldalán x és $-y$ szimmetrikus függvényei állnak. Így (ugyanis várható, hogy a (2)-ből adódó

$$[x+(-y)]^4=6^4=1296 \tag{5}$$

egyenlet bal oldalát, amely szintén szimmetrikus függvénye x és $-y$-nak, lehet úgy alakítani, hogy benne csak (2), (3) és (4) bal oldala szerepeljen. Valóban, kifejtés után

$$x^4-4x^3y+6x^2y^2-4xy^3+y^4-(x^4+y^4)-4(x-y)^2xy-2(xy)^2=1296,$$

tehát

$$272-4\cdot 6^2n-2n^2=1296, \qquad n^2+72n+512=0,$$

és innen $n_1=-8, n_2=-64$.

Minthogy azonban (2)-ről (5)-re áttérve nem ekvivalens átalakítást végeztünk, ki kell próbálnunk, hogy a kapott számok kielégítik-e a feladat feltételeit. Evégett meg kell határoznunk az x, y tényezőket is. Ezeket (2) és (3)-ból számíthatjuk ki. n_1-gyel ugyanarra a két tényezőpárra jutunk, mint az I. megoldásban, n_2-höz pedig nem tartozik (valós) tényezőpár, ezt tehát nem tekinthetjük megoldásnak.

Megjegyzés. A versenyzők többsége *indokolatlanul* feltételezte, hogy a tényezők egész számok, ezekre azután (1), ill. (4)-ben végzett próbálgatással rá is jutott. Volt, aki csak azt tételezte fel, hogy a tényezők racionálisak, és kimutatta, hogy (ebben az esetben) a tényezők egész számok, továbbá, hogy a feladat túlhatározott, amennyiben a (2) egyenlet felesleges, mert 272 csak egyféleképpen írható két egész szám negyedik hatványának összegeként. – Ámde a feladat szerint sem a két tényezőnek, sem magának a keresett szorzatnak nem kell még racionálisnak sem lennie! Tekintsünk két ellenpéldát. (2) és (3)-at változatlanul hagyva legyen pl. a tényezők negyedik hatványainak összege a kitűzött feladattól eltérően: $x^4+y^4=386$; ekkor az előzőhöz hasonló számítással $x=\sqrt{2}+3, y=\sqrt{2}-3$, $n=-7$ adódik, tehát a keresett szám racionális, de a tényezők irracionálisok. Ha pedig (2) és (3)-at ismét meghagyva $x^4+y^4=200$, akkor $x=\sqrt{\sqrt{748}-27}+3$, $y=\sqrt{\sqrt{748}-27}-3$, $n=\sqrt{748}-36$, tehát a tényezőkkel együtt a keresett szám is irracionális.

2. feladat. *Jelentsen a, b, c három olyan pozitív számot, amelyek közül kettő-kettőnek az összege legfeljebb* 1. *Bizonyítsuk be, hogy*

$$a^2+b^2+c^2\le a+b+c-ab-bc-ca\le\frac{1}{2}(1+a^2+b^2+c^2). \tag{1}$$

Megoldás: A kettős egyenlőtlenség részeit külön-külön bizonyítjuk mindkét esetben annak megmutatásával, hogy a jobb és bal oldal különbsége nem lehet negatív. – Valóban, az első egyenlőtlenség jobb és bal oldalának különbsége így írható:

$$a(1-b-a)+b(1-c-b)+c(1-a-c). \tag{2}$$

A feltétel szerint

$$a+b\leq 1, \qquad b+c\leq 1, \qquad c+a\leq 1, \tag{3}$$

így

$$1-b-a\geq 0, \qquad 1-c-b\geq 0, \qquad 1-a-c\geq 0, \tag{4}$$

és ezeket rendre a pozitív a, b, c-vel szorozva és összeadva a bal oldalon (2)-t, a nem nagyobb jobb oldalon pedig 0-t kapunk. Ezzel (1) első részét bebizonyítottuk.

(2) akkor és csak akkor egyenlő 0-val, ha (4)-ben, és ezért már (3)-ban is mind a három helyen az egyenlőségi jel érvényes. Egyenlőségi jellel (3)-ban egyenletrendszer áll előttünk a, b, c-re; megoldása

$$a=b=c=\frac{1}{2}, \tag{5}$$

ez a szükséges és egyben elegendő feltétele annak, hogy (1) első részében egyenlőség álljon fenn.

(1) második része jobb és hal oldalának különbségéről könnyen észrevehetjük, hogy egy teljes négyzet fele:

$$\frac{1}{2}(1+a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)+(ab+bc+ca)=\frac{1}{2}(1-a-b-c)^2,$$

tehát valóban nem lehet negatív. Így a bizonyítandó egyenlőtlenség második része is helyes. – A két oldal akkor és csak akkor egyenlő, ha a négyzet alapja 0, vagyis

$$a+b+c=1. \tag{6}$$

Minthogy (5) és (6) egyidejűleg nem állhat fenn, azért a, b, c-nek nincs olyan értékrendszere, amely mellett (1)-ben egyidejűleg mindkét helyen az egyenlőség jele volna érvényes.

Megjegyzések. 1. Az utóbbi bizonyítás során nem használtuk ki a (3) feltételeket, sőt az a, b, c számok pozitívságát sem, ezért (1) második része a, b, c-nek bármely értékrendszere mellett fennáll. (Székely Jenő észrevétele.)

2. Más irányú általánosítása (1) második részének: tetszőleges $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számokra

$$\begin{gathered}(a_1+a_2+\ldots+a_n)-(a_1a_2+a_1a_3+\ldots+a_1a_n+a_2a_3+a_2a_4+\ldots+\\ +a_2a_n+a_3a_4+\ldots+a_{n-1}a_n)\leq\frac{1}{2}(1+a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2).\end{gathered}$$

Bizonyítása ugyanúgy történhet, ahogyan (1) második részét bizonyítottuk. (Fritz József dolgozatából.)

3. Az egyenlőtlenség első részének bizonyítását is átvihetjük 3 helyett bármilyen $n\geq 2$ számú tagra. Ha ugyanis $a_1, a_2, \ldots, a_n$ olyan pozitív számok, amelyek közül kettő-kettőnek az összege legfeljebb 1, akkor

$$\begin{aligned}0\leq\frac{1}{2}\big\{&a_1[(1-a_1-a_2)+\ldots+(1-a_1-a_n)]+a_2[(1-a_2-a_1)+\\ &+(1-a_2-a_3)+\ldots+(1-a_2-a_n)]+\ldots+a_n[(1-a_n-a_1)+\\ &+\ldots+(1-a_n-a_{n-1})]\big\}=\frac{n-1}{2}[(a_1+\ldots+a_n)-\\ &-(a_1^2+\ldots+a_n^2)]-(a_1a_2+a_1a_3+\ldots+a_{n-1}a_n)\end{aligned}$$

és innen átrendezéssel a következő általánosítást nyerjük:

$$\frac{n-1}{2}(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)\leq\frac{n-1}{2}(a_1+a_2+\ldots+a_n)-(a_1a_2+a_1a_3+\ldots+a_{n-1}a_n).$$

4. A kimondott általánosítások n-nek bármely $n\geq 2$ értékére fennállanak, vagyis n minden olyan értékére, amely mellett az egyenlőtlenségeknek egyáltalán értelmük van.

5. Összefoglalva a 2. és 3. általánosítást az (1) kettős egyenlőtlenség következő általánosítását nyertük: Ha $a_1, a_2, \ldots, a_n$ olyan pozitív számok, amelyek közül bármelyik kettőnek összege legfeljebb 1, akkor

$$\begin{gathered}\frac{n-1}{2}(a_1^2+\ldots+a_n^2)\leq\frac{n-1}{2}(a_1+\ldots+a_n)-(a_1a_2+\ldots+a_{n-1}a_n)\leq\\ \leq\frac{1}{2}(1+a_1^2+\ldots+a_n^2)+\frac{n-3}{2}(a_1+\ldots+a_n).\end{gathered}$$

A tett feltevés az első rész fennállásának elegendő, de nem szükséges feltétele már a feladatban szereplő $n = 3$ esetben sem; pl. $n = 3$, $a_1 = 1/4$, $a_2 = 1/3$, $a_3 = 3/4$ esetében az egyenlőtlenség első része fennáll, bár $a_2 + a_3 > 1$. – A második rész $a_1, a_2, \ldots, a_n$ bármely értékei mellett fennáll.

6. Az (1) második része így is bizonyítható: nemnegatív számok mértani közepe nem nagyobb számtani közepüknél. Ezt az 1 és $(a+b+c)$ pozitív számokra alkalmazva

$$\sqrt{1(a+b+c)} \leq \frac{1+(a+b+c)}{2}. \tag{7}$$

Itt mindkét oldal pozitív, ezért a bal oldal négyzete sem nagyobb a jobb oldal négyzeténél:

$$a+b+c \leq \frac{1}{4}(1+a^2+b^2+c^2) + \frac{1}{2}(a+b+c) + \frac{1}{2}(ab+bc+ca).$$

Innen pedig, 2-vel szorozva és a négyzetes tagok kivételével minden tagot a bal oldalra átvive (1) második részét kapjuk. – (7)-ből is látható, hogy egyenlőség csak (6) fennállása esetén következik be.

3. feladat. *Egy egyenlő szárú háromszög magasságpontja felezi az alaphoz tartozó magasságot. Szerkesszük meg a háromszöget, ha adott az alapot és a két szár meghosszabbítását érintő kör sugara.*

I. megoldás: A keresett ABC háromszög ($AB = AC$) alakját megszerkeszthetjük annak alapján, hogy a körülírt kör középpontja a feltételnek megfelelő háromszögekben a szimmetriatengely alap felőli negyedelő pontjával esik egybe. Ez így látható be: legyen az alap felezőpontja A_1, a B-ből húzott magasság (amely átmegy az AA_1 szakasz M felezőpontján) messe AC-t D-ben, az A_1-ből AC-re bocsátott merőleges talppontja legyen E. Mivel MD az AA_1E háromszögnek, A_1E pedig a BCD háromszögnek középvonala, ezért $AD = DE = EC$. Az AC oldal F felezőpontja tehát DE-t is felezi, így az F-ben AC-re emelt merőleges, – amelynek AA_1-gyel való metszéspontja a háromszög köré írt kör O középpontja – az A_1EDM derékszögű trapéz középvonala, s így felezi az A_1M szakaszt. Ezzel állításunkat igazoltuk.

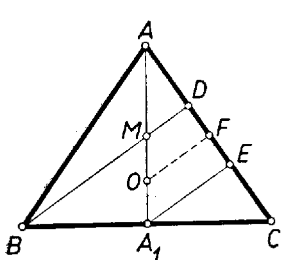
Ennek alapján a keresett háromszöghöz hasonlót úgy szerkeszthetünk, hogy tetszőlegesen felvesszük az AA_1 magasságot, ezen megszerkesztjük az M felező- és az O negyedelő pontot. Az O körül OA sugárral írt kör metszi ki az A_1 pontban AA_1-re állított merőlegesből a háromszög B és C csúcsát.

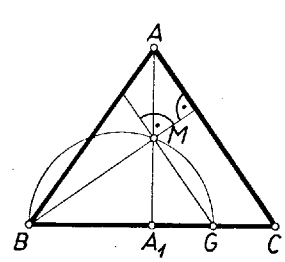
Az ABC háromszögnek a kívánt méretre nagyítását pl. úgy végezhetjük, hogy az adott sugárral megrajzoljuk a „hozzáírt" kört, majd ehhez az ABC háromszög oldalaival párhuzamos érintőket úgy szerkesztünk, hogy a kör a keletkezett háromszög alapját és szárainak meghosszabbítását érintse.

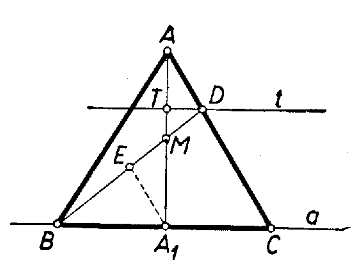
Megjegyzés. Ehhez a szerkesztéshez jutunk az Euler-egyenes tulajdonságainak felhasználásával is, de lényegében erre vezet az is, ha felhasználjuk, hogy a magassági pontot az oldalakra tükrözve a tükörkép a körülírt körre esik. Ismeretes ugyanis, hogy a háromszög M magassági pontja, S súlypontja – amely mindhárom súlyvonalnak az oldal felőli harmadolópontja – és körülírt körének O középpontja ebben a sorrendben egy egyenesen, a háromszög Euler-egyenesén van, ami egyenlő szárú háromszögnél egybeesik a szimmetriatengellyel, és $MS = 2SO$. – Második észrevételünk alapján pedig az AA_1 szakasz M felezőpontjának A_1-re való $\overline{M}$ tükörképét véve $A\overline{M}$-ben a körülírt kör egy átmérőjét nyertük.

II. megoldás: Gondoljuk a feladatot megoldottnak, és messe az M-en átmenő, AC-vel párhozamos egyenes BC-t G-ben. Ekkor MG az AA_1C háromszögnek középvonala, így $CG = GA_1$, másrészt MG merőleges MB-re. – Ennek alapján a tetszőlegesen felvett BC alapon megszerkesztjük az A_1 felező és G negyedelő pontot, BG mint átmérő fölé (Thalész-) félkört írunk, ebből az A_1-ben BC-re emelt merőlegessel kimetsszük M-et, végül A_1-et M-re tükrözve kapjuk a keresetthez hasonló ABC háromszög hátralevő A csúcsát.

III. megoldás: Legyen egy tetszés szerinti ABC egyenlő szárú háromszögben ($AB = AC$) a BC alap felezőpontja A_1 és az AA_1 szakasz felezőpontja M. Meg fogjuk mutatni, hogy a BM egyenes és az AC oldal D metszéspontjából AA_1-re bocsátott merőleges T talppontja az AA_1 szakasz A felőli harmadoló pontja, függetlenül a háromszög alakjától. – Ezt tudva a keresett háromszög alakja megszerkeszthető. Egy a egyenes egy A_1 pontjában AA_1 merőlegest szerkesztünk, és megszerkesztjük AA_1-nek az A felőli T harmadoló pontját. Ekkor az összes olyan ABC egyenlő szárú háromszögekben, amelyeknek alapja az a egyenesen van, az alap végpontjait AA_1 felező pontjával összekötő egyeneseknek a szemközti oldallal való metszéspontja a T-ben AA_1-re merőlegesen húzott t egyenesen van.





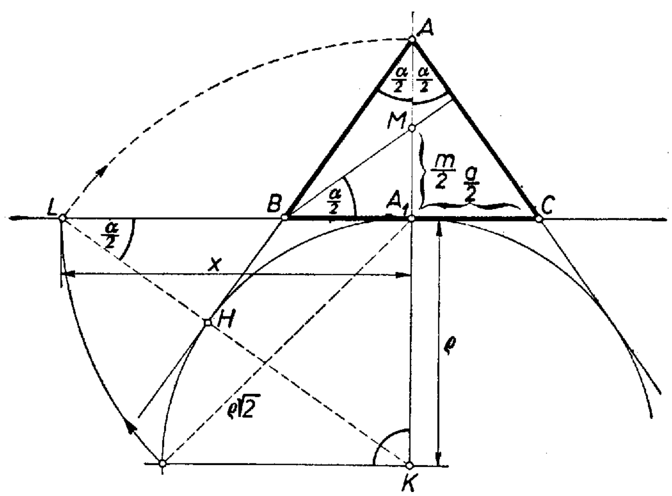


Ennek kell azt a D_0 pontját kikeresnünk, amelyre AD_0 és BD_0 vagy azt, amelyre AD_0 és CD_0 merőlegesek, az ilyen pontokat pedig az AM szakasz mint átmérő fölé rajzolt (Thalész-) kör metszi ki t-ből. Legyen a kör és az egyenes két metszéspontja D_0 és D_0^*; ezek AA_1-re szimmetrikusan helyezkednek el, így mindkettőt összekötve A-val és az összekötő egyeneseket meghosszabbítva, amíg a-t metszik (mondjuk B-ben, ill. C-ben) egyenlő szárú háromszöget kapunk. Ebben a B-t M-mel összekötő egyenes AC-t annak t-vel való metszéspontjában, vagyis D_0^*-ban metszi. Ez rajta van a Thalész-körön is, tehát BD_0^* az AC oldalra bocsátott magasság. Így valóban megszerkesztettük a keresett háromszög alakját – amennyiben a T pontra vonatkozó állításunk igaz.

Ennek igazolására húzzunk A_1-ből párhuzamost AC-vel, messe ez BD-t E-ben. A_1E a BCD háromszög középvonala, s így E felezi a BD szakaszt. Másrészt EM és MD egyenlő, mert AMD és A_1ME háromszögek megfelelő oldalai, ezek pedig egybevágók, ugyanis AM és A_1M oldaluk egyenlő, M-nél levő szögeik csúcsszögek, A-nál és A_1-nél levő szögeik pedig váltószögek. – Ekkor azonban MD a BM szakasz harmadrésze, s így az A_1BM és TDM hasonló derékszögű háromszögekből (az M-nél levő szögek csúcsszögek) nyerjük, hogy TM is harmadrésze A_1M-nek, tehát hatoda AA_1-nek. Így A_1T kétharmada és AT harmadrésze AA_1-nek, amint állítottuk.

IV. megoldás. Számítás alapján egy olyan szerkesztést is megadhatunk, amelyben nem szükséges egy hasonló háromszög közbeiktatása.

Jelöljük a háromszög alapját és magasságát a-val, ill. m-mel, az a-val szemközti szögét α-val. Legyen az alapot és a szárak meghosszabbítását érintő körnek középpontja K (az AA_1 magasság, egyben szögfelező meghosszabbításán), az AB egyenesen levő érintési pontja H és sugara az adott ϱ. Messe a KH egyenes a BC egyenest az L pontban és legyen $A_1L = x$. Ezt az x hosszúságot fogjuk kiszámítani, majd megszerkeszteni.



Merőleges szárú hegyes szögekként $BAA_1\sphericalangle = KLA_1\sphericalangle = \alpha/2$ és $CAA_1\sphericalangle = MBA_1\sphericalangle = \alpha/2$, ezért a KLA_1 és BAA_1, valamint CAA_1 és MBA_1 derékszögű háromszögek hasonlók. A második és az első, ill. a negyedik és az első háromszögből a befogókra:

$$\frac{a}{2} : m = \varrho : x, \qquad \text{ill.} \qquad \frac{m}{2} : \frac{a}{2} = \varrho : x.$$

E két aránypárból (egyenletből) m-et kiküszöbölve a is kiesik (ez úgy is végrehajtható, hogy a két aránypárt tagról tagra összeszorozzuk és egyszerűsítünk), így x és ϱ között kapunk összefüggést:

$$x^2 = 2\varrho^2,$$

és innen $x = \varrho\sqrt{2}$.

Ennek alapján szerkesztésünk a következő: a ϱ sugarú körhöz tetszés szerinti A_1 pontjában érintőt szerkesztünk, erre A_1-től mindkét irányban felmérjük $\varrho\sqrt{2}$-t vagyis a ϱ befogójú egyenlő szárú derékszögű háromszög átfogóját. A végpontokat a kör K középpontjával összekötő egyenesek kimetszik a körből a szárak meghosszabbításainak érintési pontjait.

Megjegyzések. 1. A-t a KA_1 félegyenesből $KA = KL$ alapján is kimetszhetjük (a KLA_1 és KAH derékszögű háromszögek egybevágók).

2. Több versenyző lényegében a legutóbbi gondolatmenettel $\alpha/2$-t határozta meg: helyesen erre jutott: $\mathrm{tg}^2\alpha/2 = 1/2$, ebből négyzetgyökvonással és trigonometriai táblázattal meghatározta a szöget, és azt szögmérővel felmérte. – Ez az eljárás azonban nem tekinthető (euklidészi) szerkesztésnek.

3. A keresetthez hasonló egyenlő szárú háromszög akkor is megszerkeszthető, ha – a feladattól eltérően – az M magasságpontnak felezés helyett valamely más, előírt arányban kell osztania az AA_1 szakaszt. Megoldásaink megfelelő módosítással az $A_1M : MA = 1 : k$ előírás esetén is használhatók, kivéve az I. megoldást, amelyben lényegesen kihasználtuk, hogy $k = 1$ (a hozzáfűzött megjegyzések azonban használhatók). A feladatnak k minden (pozitív) értéke mellett egy és csakis egy megoldása van, és ez áll akkor is minden $k < 1$-re, ha M-et AA_1 meghosszabbításán kell kapnunk.