Kezdők (I. osztályosok) *versenye.*

1. feladat: *Bontsuk fel* 5/8-*ot minden lehetséges módon három olyan pozitív tört összegére, amelyeknek a számlálója* 1.

Megoldás: Olyan a, b, c természetes számokból álló hármast kell keresnünk, amelyre

$$\frac{5}{8}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}. \tag{1}$$

Feltehetjük, hogy a a legkisebb, c a legnagyobb nevező a hármasban (egyenlőség persze nincs kizárva), vagyis

$$(0<)a\leq b\leq c. \tag{2}$$

Eszerint reciprok értékeik közül $1/a$ a legnagyobb és $1/c$ a legkisebb:

$$\frac{1}{a}\geq\frac{1}{b}\geq\frac{1}{c}(>0). \tag{3}$$

Tájékozódjunk a nagyságáról. Evégett (1) jobb oldalán a második és harmadik tagot (3) alapján előbb a nem kisebb $1/a$-val, majd a biztosan kisebb 0-val helyettesítjük; így olyan két egyismeretlenes egyenlőtlenséget kapunk, melyeknek $1/a$ a nagyobb, ill. a kisebb oldalán áll:

$$\frac{5}{8}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leq\frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a}=\frac{3}{a},\quad \text{innen}\quad a\leq\frac{24}{5}<5,$$
$$\frac{5}{8}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}>\frac{1}{a},\quad \text{innen}\quad a>\frac{8}{5}>1.$$

Ezek szerint a-ra három lehetőség van: $a=2$, $a=3$, vagy $a=4$.

1. Keressünk először $a=4$-hez megfelelő b-t és c-t. (1)-ből

$$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{5}{8}-\frac{1}{4}=\frac{3}{8}. \tag{4}$$

A fenti meggondolás első felét b-re ismételve (3) alapján

$$\frac{3}{8}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leq\frac{1}{b}+\frac{1}{b}=\frac{2}{b},\qquad \text{tehát}\quad b\leq\frac{16}{3}(<6).$$

Másrészt most (2) szerint b is legalább 4, tehát $b=4$, vagy $b=5$. Ezekkel (4)-ből $c=8$, ill. $c=40/7$ adódik, de az utóbbi nem egész szám. – Eszerint $a=4$ mellett egy felbontást kapunk:

$$\frac{5}{8}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}. \tag{1}$$

2. Legyen most $a=3$. Ekkor (1) így alakul

$$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{5}{8}-\frac{1}{3}=\frac{7}{24}, \tag{5}$$

innen a fentiekhez hasonlóan

$$\frac{7}{24}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leq\frac{1}{b}+\frac{1}{b}=\frac{2}{b},\qquad \text{tehát}\quad b\leq\frac{48}{7}<7,$$

eszerint most a $b=3$, 4, 5 és 6 lehetőségek jönnek szóba. A megfelelő c-értékek (5)-ből: $c=-24$, $c=24$, $c=120/11$, ill. $c=8$. Csak a második és a negyedik érték természetes szám, így két felbontást kapunk:

$$\frac{5}{8}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{24}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}. \tag{II, III}$$

3. Végül az $a=2$ esetben (1)-ből

$$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{5}{8}-\frac{1}{2}=\frac{1}{8}.$$

Itt alkalmas átalakítással közvetlenül áttekinthetjük az összes b, c értékpárokat. Távolítsuk el a törteket, gyűjtsünk minden tagot az egyenlet jobb oldalára, és igyekezzünk a kifejezést szorzattá alakítani:

$$8b+8c=bc,\quad 0=bc-8b-8c=(b-8)(c-8)-64.$$

Eszerint 64-et kell minden lehető módon két egész tényezőre bontani. A tényezőkre (2) folytán $b-8 \leq c-8$, másrészt nem lehet a két tényező negatív, mert akkor a kisebbre $b-8 \leq -8$, $b \leq 0$ adódnék. Így a lehetséges felbontások:

$$b-8=1,\ 2,\ 4,\ 8,$$
$$c-8=64, 32, 16, 8,$$

és ezekből a következő felbontások adódnak:

$$\text{(IV–VII)} \qquad \frac{5}{8}=\frac{1}{2}+\frac{1}{9}+\frac{1}{72}=\frac{1}{2}+\frac{1}{10}+\frac{1}{40}=\frac{1}{2}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}=\frac{1}{2}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}.$$

Mindezek szerint 5/8-ra az előírt alakban a fenti hét (I)–(VII) felbontás lehetséges.

Megjegyzés. Az $a=3$ esetben adódott

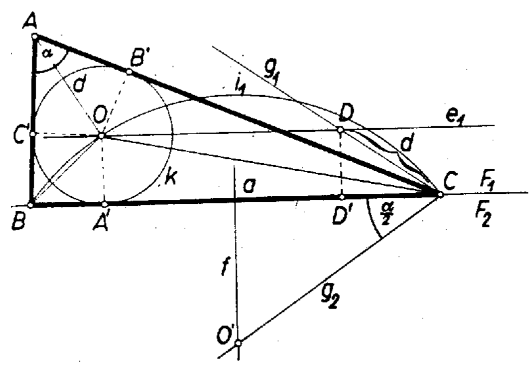
$$\frac{5}{8}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{24}$$

felbontás mutatja, hogy ha elejtjük a pozitívság követelményét, akkor a feladatnak több megoldása van. A fentihez hasonló gondolatmenettel további 6 ilyen felbontást találunk:

$$\frac{5}{8}=\frac{1}{1}+\frac{1}{8}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{7}-\frac{1}{56}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}-\frac{1}{24}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8};$$
$$\frac{5}{8}=\frac{1}{1}-\frac{1}{4}-\frac{1}{24}=\frac{1}{1}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}.$$

2. feladat: *Szerkesszünk háromszöget, ha ismerjük egy oldalát (a), az ezzel szemközti szöget (α), és annak a szakasznak a hosszát, amely az α szög csúcsát a háromszög beírt körének középpontjával összeköti.*

I. megoldás: Gondoljuk a feladatot megoldottnak, legyen a keresett háromszög ABC, ebben $BC=a$, $BAC\sphericalangle=\alpha$ és – O-val a beírt k kör középpontját jelölve $AO=d$ az adott szakasz.



Legyenek továbbá k-nak az oldalakon levő érintési pontjai A', B', C' és sugara ϱ. Az OBC háromszögben

$$COB\sphericalangle=180^\circ-OBC\sphericalangle-OCB\sphericalangle=180^\circ-\frac{\beta}{2}-\frac{\gamma}{2}=90^\circ+\frac{180^\circ-\beta-\gamma}{2}=90^\circ+\frac{\alpha}{2}.$$

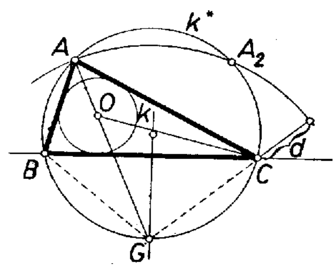
Eszerint O csak azon az i_1, i_2 körívpáron lehet, amelynek (B és C-től különböző) pontjaiból az adott BC szakasz a megszerkeszthető $90^\circ+\dfrac{\alpha}{2}$ szögben látható. Másrészt megszerkeszthetjük $OB'=\varrho$-t, mert az AOB' derékszögű háromszög alakját a d átfogó és az $\alpha/2$ hegyesszög meghatározza, – és evvel még egy mértani helyet kapunk O-ra, ugyanis O csak a BC-től ϱ távolságban fekvő e_1, e_2 párhuzamos egyeneseken lehet.

Ezek alapján a szerkesztés a következő. Felvesszük a $BC=a$ szakaszt és kijelöljük, hogy a háromszöget a BC egyenessel létrejött F_1 és F_2 félsíkok közül F_1-en kívánjuk kapni. F_1-en fekszik O is, elég lesz tehát az i_1-et és e_1-et megszerkesztenünk. CB-re a C csúcsban mindkét félsíkon felmásoljuk az $\alpha/2$ szöget, a szárak g_1, g_2, megszerkesztjük BC-nek f felező merőlegesét, majd g_2 és f-nek O' metszéspontja körül $O'B=O'C$ sugárral megrajzoljuk i_1-et. e_1-et pedig úgy kapjuk, hogy g_1-re C-ből felmérjük d-t, és ennek D végpontján át BC-vel párhuzamost húzunk. i_1 és e_1 közös pontja O, ennek vetülete BC-re A' és $OA'=\varrho$, ezek alapján megrajzoljuk a k kört. Most már az A csúcsot a B és C-ből k-hoz húzott második érintők metszéspontja adja. (Ezek céljára C', B'-t a B körül BA', ill. C körül CA' sugárral írt körrel metszhetjük ki.)

Szerkesztésünk helyes, mert a BCO' egyenlő szárú háromszög O'-nél levő szöge kétszerese $\alpha/2$ pótszögének, azaz $180^\circ-\alpha$, ez egyben a O' középpont körül $O'B$ sugárral írt kör F_1-beli i_1 ívéhez tartozó középponti szög. Így a kör F_2-beli ívéhez $180^\circ+\alpha$ nagyságú középponti szög tartozik, tehát a BOC kerületi szög ennek fele: $90^\circ+\alpha/2$. Most már a $C'BC$ és $B'CB$ szögek összege kétszerese az OBC és OCB szögek összegének, a BOC szög kiegészítő szögének, $90^\circ-\alpha/2$-nek, azaz $180^\circ-\alpha$-val egyenlő, tehát a szerkesztett érintők A-nál valóban α szöget zárnak be (az a szögük ekkora, amelynek terében a BC szakasz van). AO felezi az A-ból k-hoz húzott érintők szögét, ezért $OAB'\sphericalangle=\alpha/2=DCB\sphericalangle$, továbbá D-nek BC-n levő vetületét D'-vel jelölve az AOB' és CDD' derékszögű háromszögekben $OB' = OA' = DD'$, így e két háromszög egybevágó, tehát $AO = CD = d$.

A szerkesztés lépései O előkészítéséig egyértelműen végrehajthatók (α nyilván 0° és 180° közti szög, így fele hegyesszög). i_1 és e_1 közös pontjainak száma szerint O-ra 2, 1, 0 pontot kapunk, és ezekből ugyanennyi háromszöget, mert a további lépések ismét egyértelműek. Ha 2 megoldás adódik, ezek egybevágók, mert egymásnak f-re nézve tükrös párjai, így a feladatnak lényegében legfeljebb 1 megoldása van.

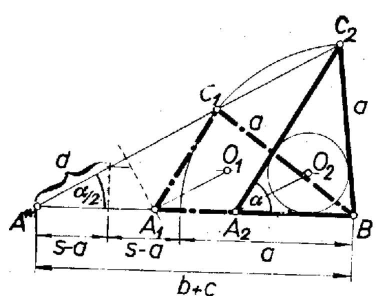
II. megoldás: Az adott α szög az a oldal látószöge az A csúcsból, ennek alapján ismert módon megszerkeszthetjük a keresett háromszög k^* körülírt körét.



A BAC szög AO felezője k^*-ot másodszor az A-t nem tartalmazó BC ívnek G felezőpontjában metszi, mert a kerületi szögek tétele szerint $GBC\sphericalangle = GAC\sphericalangle = GAB\sphericalangle = GCB\sphericalangle = \alpha/2$, tehát a BCG háromszögben $GB = GC$, és e húrokhoz egyenlő ívek tartoznak. Másrészt CO felezi az ACB szöget, ezért az OCG háromszögben $OCG\sphericalangle = (\gamma+\alpha)/2$. Ekkora a COG szög is, mint az ACO háromszög külső szöge, tehát a COG háromszög egyenlő szárú: $OG = CG$. Így A-nak G-től való távolsága $AG = AO + OG = d + CG$.

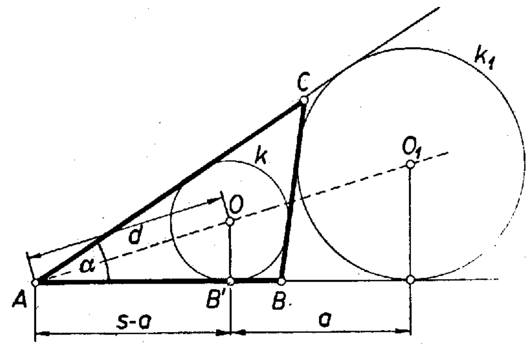
Ezek alapján a szerkesztés a következő. k^*-ban a BC-re merőleges átmérőnek az a végpontja G, ahonnan BC látószöge $180^\circ - \alpha$. (Ez is mutatja, hogy G azonos az I. megoldásban használt O'-vel.) A GC szakasznak C-n túli meghosszabbítására rámérjük d-t. A G körül $d + CG$ sugárral leírt kör k^*-ból kimetszi A-t. Aszerint, hogy a $d + CG$ szakasz kisebb, ill. nagyobb k^* átmérőjénél, ill. éppen egyenlő vele, 2, 0, ill. 1 megoldást kapunk. – Szerkesztésünk helyessége bizonyításául csak azt kell megmutatnunk, hogy a kapott A pontot G-vel összekötő szakasznak A-tól d távolságra, azaz G-től CG távolságra fekvő O^* pontja azonos az ABC háromszögbe írt kör középpontjával. Valóban, a CGO^* háromszög egyenlő szárú, és benne $CGO^*\sphericalangle = CBA\sphericalangle = \beta$, így $O^*CG\sphericalangle = 90^\circ - \beta/2$, ennélfogva $O^*CB\sphericalangle = O^*CG\sphericalangle - BCG\sphericalangle = O^*CG\sphericalangle - \alpha/2 = 90^\circ - (\alpha+\beta)/2 = \gamma/2$, vagyis O^*C felezi a C-nél fekvő szöget. Másrészt O^* az A-nál fekvő szög felezőjén is rajta van, tehát $O^* = O$.

III. megoldás: Az előbbi AOB' háromszöggel egybevágó háromszöget szerkesztve megkapjuk AB'-t, az A-ból k-hoz húzható érintőszakaszt. Erről ismeretes, hogy egyenlő $s - a$-val, ahol s a háromszög kerületének fele. Ebből (a szokásos jelölésekkel) $b + c = 2s - a = 2(s - a) + a$ alapján előállíthatjuk az A csúcsból kiinduló oldalak összegét, ezzel pedig a feladatot visszavezettük a háromszögnek az a, $b + c$, α adathármasból való ismert szerkesztésére: az A^* csúcsú $\alpha/2$ szög egyik szárára felmérjük $b + c$-t, ennek B végpontjából a sugarú körívvel a másik szárból kimetsszük C-t, majd A^*C felező merőlegesével az első szárból A-t.



A körívnek a szög szárával 2, 1, 0 közös pontja, egyszersmind ennyi megoldás van. Két metszéspont esetén mindkettő A^*-nak ugyanazon oldalára esik (különben $a > b + c$ volna), ezért A_1 és A_2 az A^*B szakaszra esnek. Az így adódó A_1BC_1 és A_2C_2B háromszögek egybevágók. Ugyanis az $A^*C_1A_1$ és $A^*C_2A_2$ egyenlő szárú háromszögek külső szögeként $C_1A_1B\sphericalangle = C_2A_2B\sphericalangle = \alpha$, másrészt $A^*C_1A_1\sphericalangle = A^*C_2A_2\sphericalangle = \alpha/2$. $C_1BA_1\sphericalangle = \varepsilon$ jelöléssel $BC_1A_1\sphericalangle = 180^\circ - \alpha - \varepsilon$, így $C_2C_1B\sphericalangle = 180^\circ - (180^\circ - \alpha - \varepsilon) - \alpha/2 = \varepsilon + \alpha/2$. Ámde a BC_1C_2 háromszög egyenlő szárú, ezért $C_1C_2B\sphericalangle = \varepsilon + \alpha/2$, tehát $A_2C_2B\sphericalangle = \varepsilon$. Így a kérdéses háromszögek egy oldalban és két megfelelő szögben megegyeznek, valóban egybevágók.

IV. megoldás: α és d ismeretében megszerkeszthető O, k és α szárainak az érintési pontig terjedő szakasza: $s - a$. Ezzel egyúttal $(s - a) + a = s$ is ismert, a csúcstól ekkora távolságban érinti α szárait az a oldalt kívülről érintő k_1 hozzáírt kör, így ez is megszerkeszthető.



Most már k és k_1 közös belső érintőinek az α szög szárai közé eső szakasza az a oldal.

3. feladat: *Bizonyítsuk be, hogy ha*

(1) $$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0 \qquad \text{és}$$

(2) $$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,$$

akkor

(3) $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Megoldás: A (2) feltételi egyenlőség négyzete alkalmas rendezéssel így írható:

$$1=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+2\left(\frac{xy}{ab}+\frac{yz}{bc}+\frac{zx}{ca}\right)= \\ =\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+\frac{2xyz}{abc}\left(\frac{c}{z}+\frac{a}{x}+\frac{b}{y}\right).$$

A második zárójelbeli kifejezésben ráismerünk (1) bal oldalára, amely 0-val egyenlő. Ennek figyelembevételével kapott egyenlőségünk azonos (3)-mal, a bizonyítandó állítással.

Az (1) és (2) feltevéseknek csak úgy van értelmük, ha az a, b, c, x, y, z számok 0-tól különbözők, így pedig az alkalmazott átalakítások megengedett azonos átalakítások voltak.

Megjegyzés. A látottaknál valamivel több ismeret felhasználásával az állítás így is bizonyítható. x/a, y/b, z/c-t u, v, w-vel jelölve ezek 0-tól különböző valós számok, feltételeink szerint

(4) $$u+v+w=1, \qquad \frac{1}{u}+\frac{1}{v}+\frac{1}{w}=0, \qquad \text{amiből} \quad vw+wu+uv=0,$$

és $u^2+v^2+w^2$-et kell meghatároznunk. (4) első és harmadik kifejezése együtthatóként szerepel a $T=(t-u)(t-v)(t-w)$ kifejezésnek t hatványai szerint rendezett polinomalakjában, eszerint uvw-t d-vel jelölve

(5) $$T=t^3-(u+v+w)t^2+(uv+vw+wu)t-uvw=t^3-t^2-d.$$

Hozzuk most két módon polinomalakra a $T^*=(t^2-u^2)(t^2-v^2)(t^2-w^2)$ szorzatot. Egyrészt

$$T^*=(t-u)(t-v)(t-w)[-(-t-u)(-t-v)(-t-w)]=TT',$$

ahol T' annak a kifejezésnek (-1)-szerese, amely T-ből t-nek $-t$-vel való helyettesítésével áll elő; ennélfogva $T'=-[(-t)^3-(-t)^2-d]=t^3+t^2+d$, és így $T^*=(t^3-t^2-d)(t^3+t^2+d)=t^6-t^4-2dt^2-d^2$.
Másrészt az (5)-höz hasonló kifejtéssel

$$T^*=t^6-(u^2+v^2+w^2)t^4+(u^2v^2+v^2w^2+w^2u^2)t^2-u^2v^2w^2.$$

A két polinomalakból az egyező fokú tagok együtthatóinak összehasonlításából kapjuk a bizonyítandó

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\right)u^2+v^2+w^2=1$$

egyenlőséget, továbbá leolvashatjuk az

(6) $$\left(\frac{x^2y^2}{a^2b^2}+\frac{y^2z^2}{b^2c^2}+\frac{z^2x^2}{c^2a^2}=\right)u^2v^2+v^2w^2+w^2u^2=-2d=-uvw\left(=-2\frac{xyz}{abc}\right)$$

összefüggést is. Ebből az is látszik, hogy u, v, w közül kettő pozitiv és egy negatív kell hogy legyen. Ez valóban leolvasható a (4) feltételi egyenletekből is: a második szerint nem lehet mindhárom egyező előjelű; ha pedig kettő, pl. v és w negatív, akkor az első egyenlet szerint mindkettő abszolút értéke kisebb, mint u-é, tehát $\frac{1}{u}$ kisebb $\left|\frac{1}{v}\right|$ és $\left|\frac{1}{w}\right|$-nél, így $\frac{1}{u}+\frac{1}{v}$ negatív, és ez méginkább áll $\frac{1}{u}+\frac{1}{v}+\frac{1}{w}$-re.

A (6) azonosság közvetlenül is nyerhető a feltételi egyenletekből:
$u^2v^2+v^2w^2+w^2u^2=(uv+vw+wu)^2-2uvw(u+v+w)=-2uvw.$