Kezdők (I. osztályosok) *versenye.*

1. feladat: *Két csoportba oszthatjuk-e a következő* 10 *számot úgy, hogy az egyik csoportba tartozók összege* 9*-cel legyen nagyobb, mint a másik csoportba tartozók összege:* -7, -4, -2, 3, 5, 9, 10, 18, 21, 33?

I. megoldás: Vonjuk ki az adott számok összegéből, 86-ból, a készítendő csoportok összegének eltérését, 9-et. A maradékot, 77-et két egyenlő részre osztva kapnók a kisebb összegű csoport összegét. De máris látjuk, hogy a kívánt felosztás lehetetlen, mert 77 páratlan, a fele nem egész, adott számaink viszont valamennyien egészek.

Megjegyzések. 1. Lényegében ugyanígy bizonyították a kívánt felosztás lehetetlenségét azok is, akik a kisebb összegű csoportban szereplő számok összegét x-szel jelölve – így a másik csoport összege $x+9$ – az $x+(x+9)=86$ egyenletről mutatták meg, hogy megoldása tört szám.

2. Több versenyző úgy vélte megoldani a feladatot, hogy elhagyta az adott számok között szereplő 9-et, és azt mutatta meg, hogy a fennmaradt számok nem oszthatók két egyenlő összegű csoportba. Bármennyire hasonlít is ez a gondolat a fenti megoldáshoz, – mégsem azonos vele, és nem teljes bizonyítás. Ebből csak azt látjuk, hogy olyan megoldása nincs a feladatnak, melyben a 9-es a nagyobb összegű csoportba tartozik. Olyan megoldás viszont még nem lehetetlen, amelyben a 9-es a kisebb összegű csoport tagja. Ha pl. az adottak helyett a 9, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2 számokat kellene ugyanazon követelmény mellett két csoportba osztani, ez lehetséges: a kisebb összegű csoportban egyedül a 9-es áll, a másikban a 2-esek, bár – mint könnyű belátni – a 9-es itt sem lehet a nagyobb összegű csoportnak tagja.

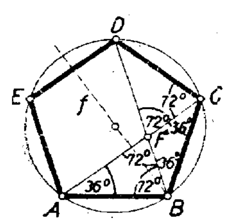
3. Általában: adott egész számokat nem lehet úgy két csoportra osztani, hogy a csoportok összegének eltérése adott egész szám legyen, ha a számok összegéből az előírt eltérést levonva páratlan számot kapunk. De ha így páros szám adódik, ebből még nem következik, hogy a kívánt csoportosítás lehetséges. Pl. a 9, 2, 2, 2, 2, 2, számcsoport nem osztható ketté követelményünk szerint, bár összegüknek és az eltérésnek különbsége osztható 2-vel: $(19-9):2=5$.

4. Megállapításunk több csoportra a következőképpen általánosítható. Adott egész számok k számú, adott, egész eltérésű csoportra való felbonthatóságának szükséges – de, mint láttuk, nem elegendő – feltétele az, hogy a számok összegéből az eltérések összegét levonva k-val osztható számot kapjunk. (Ez az összeg úgy értendő, hogy valamennyi csoport összegének egy bizonyos, kijelölt számcsoport összegétől való eltéréseit vesszük, előjelükkel együtt.)

II. megoldás: A feladat ezt kívánja: alkossunk a felsorolt egész számokból olyan két csoportot, hogy a bennük levő számok összegének különbsége 9 legyen, a két összeg összeadva pedig 86-ot adjon. Ez lehetetlen, mert ha két egész szám különbsége páratlan, akkor a két szám ellentétes párosságú, és ezért összegük is páratlan.

2. feladat: *Húzzuk meg egy szabályos ötszög két egymást metsző átlóját. Bizonyítsuk be, hogy ezek olyan darabokra osztják egymást, amelyek közül a nagyobbik egyenlő az ötszög oldalával.*

I. megoldás: Legyen az $ABCDE$ szabályos ötszög AC és BD átlóinak metszéspontja F. Az $AF=AB$ egyenlőséget abból mutatjuk meg, hogy az ABF háromszögnek BF-en fekvő két szöge egyenlő (1. ábra).



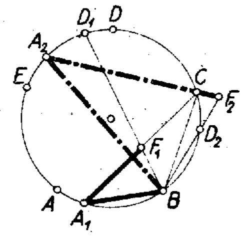
1. ábra

Minden (konvex) ötszög szögeinek összege $3\cdot 180^\circ = 540^\circ$. A szabályos ötszög szögei egyenlők, így egy-egy szöge 108°. Az ötszög köré írható körből az oldalak, mint egyenlő húrok, egyenlő íveket metszenek le. Az ötszög mindegyik szögének szárai között három ilyen ív fekszik, ezért mindegyik ív az ötszög csúcsaiból $108^\circ:3=36^\circ$-nyi szögben látható. Eszerint $BAF\sphericalangle = BAC\sphericalangle = 36^\circ$, $ABF\sphericalangle = ABD\sphericalangle = 2\cdot 36^\circ = 72^\circ$, így $AFB\sphericalangle = 180^\circ - (36^\circ + 72^\circ) = 72^\circ = ABF\sphericalangle$, amit bizonyítani akartunk.

Az AF szakasz az AC átlónak nagyobbik darabja: $AF > FC$, mert az ABF háromszögben AF, az egyik 72°-os szöggel szemben fekvő oldal, nagyobb BF-nél, a 36°-os szöggel szemben fekvő oldalnál, BF pedig egyenlő FC-vel, mert a BCF háromszög – két 36°-os szöge révén – ugyancsak egyenlő szárú.

Hasonlóan látható be, hogy $DF=DC$, és hogy $DF>FB$. – Ezzel a bizonyítást befejeztük.

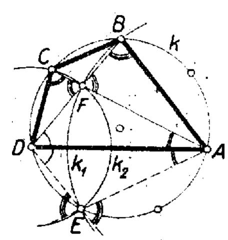
Megjegyzések. 1. A bizonyítás első része csak azt használta fel, hogy a (rövidebb) BC ív egy, és hogy a (rövidebb) DA ív két ötödrésze a kör kerületének. Eszerint az $AF=AB$ egyenlőség érvényes marad akkor is, ha a DA ívet a körön elforgatjuk (2. ábra). – Vegyük észre, hogy az E csúcs a bizonyítás egyik részében sem szerepel.



2. ábra

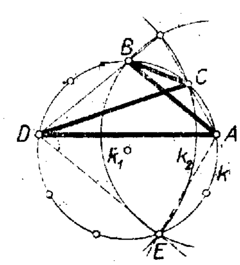
2. Az $AFB\sphericalangle = ABF\sphericalangle$ egyenlőséget a mértékszámok kiszámítása nélkül is megmutathatjuk. Az ABD szög két ötszögoldalhoz tartozó íven nyugvó kerületi szög, a CBD és ACB kerületi szögek pedig egy-egy ilyen íven nyugszanak. Így az utóbbiak összege egyenlő az ABD szöggel, másrészt ez az összeg a BCF háromszög külső szögeként a BFA szöggel is egyenlő. – Itt viszont csak azt használtuk fel, hogy az $ABCD$ húrnégyszög oldalai által lemetszett körívekre fennáll az $\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{AD}$ egyenlőség. Tehát tulajdonképpen a következő általánosabb tételt bizonyítottuk be: ha az $ABCD$ húrnégyszögben fennáll az $\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{AD}$ egyenlőség, akkor $AF = AB$ és $DF = DC$, ahol F az AC és BD átlók metszéspontja. (Mindkét átlónak van egy oldallal egyenlő darabja, ahogyan az eredeti tétel is állítja.)

Ennek a tételnek egy más bizonyítása: az A körül AB sugárral írt k_1 körnek az $ABCD$ négyszög k körülírt körével való második közös pontját E-vel jelölve (3. ábra) $\overset{\frown}{DE} = \overset{\frown}{AD} - \overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{AD} - \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{DC}$, tehát a D körül DC sugárral írt k_2 kör szintén E-ben metszi k-t.



3. ábra

Így $EDA\sphericalangle = BDA\sphericalangle = FDA\sphericalangle$ és $EAD\sphericalangle = CAD\sphericalangle = FAD\sphericalangle$, tehát az AE egyenes az AF-nek, DE a DF-nek tükörképe AD-re, vagyis E az F tükörképe AD-re. Eszerint $AF = AE = AB$ és $DF = DE = DC$; egyszersmind F a k_1 és k_2-nek második közös pontja. (Az E pont megfelel a szabályos ötszög ötödik csúcsának.) – Az állítás hurkolt négyszögre is érvényes, hacsak B és C a k ugyanazon AD ívének pontjai (4. ábra; a 3-4. ábrákon A, B, C, D egy-egy szabályos 7-, ill. 9-szög csúcsai közül valók).



4. ábra

II. megoldás: A kívánt egyenlőséget abból bizonyítjuk, hogy az $AFDE$ négyszög paralelogramma. Az I. megoldás szerint a CDE szög $108°$, a DCA szög $72°$, egymásnak kiegészítő szögei. Ámde tudjuk, hogy ha két szög egymást $180°$-ra egészíti ki, és egyik pár száruk párhuzamos – vagy egybeeső –, második száraikba pedig az elsőkből ellentétes irányú forgással jutunk – amint az említett szögek közös CD szárából DE-be negatív (az óramutató forgásával egyenlő irányú) forgás visz át, CA-ba pedig pozitív –, akkor a második szárak – itt DE és AC – szintén párhuzamosak. Ugyanígy a BD átló párhuzamos az AE oldallal. Az így létrejövő $AFDE$ paralelogrammából $AF = ED$ és $DE = AE$, amit bizonyítani akartunk.

Megjegyzés. Számos versenyző szemlélet alapján elfogadta, hogy a szabályos ötszög mindegyik átlója párhuzamos egy oldallal, vagy más szóval, hogy pl. az $ACDE$ négyszög trapéz. Ezt valamivel indokolni kellett volna. Lehet így is: az ED oldal f felező merőlegese szimmetriatengelye az ötszögnek, tehát A és C egymásnak tükörképei f-re. Ezért AC merőleges f-re, és így párhuzamos ED-vel.

3. feladat: *Melyek azok a háromjegyű természetes számok, amelyekben a számjegyek összege harmadrészére csökken, ha magához a számhoz 3-at adunk?*

Megoldás: A keresett N szám egyes helyi értékű jegyeként csak 6-nál nagyobb jegyek jöhetnek szóba, mert különben a 3-mal nagyobb N' szám harmadik jegye legfeljebb 9 lenne, vagyis nagyobb lenne N harmadik jegyénél, első két jegye egyeznék N-ével, tehát N' jegyeinek összege nem lehetne kisebb N jegyeinek összegénél.

Így N utolsó jegye 7, 8, vagy 9, ezért ettől N' utolsó jegye a tízes összevonás folytán $+3-10=-7$-tel tér el, vagyis 7-tel kisebb, az összevont 1 tízest pedig N tízeseihez adjuk hozzá. Aszerint, hogy ez a jegy 9-nél kisebb, vagy 9-cel egyenlő, a továbbiakra két eset adódik; a százas jegy csak az utóbbiban változik meg.

Ha a tízes helyi értékű jegy N-ben kisebb 9-nél, akkor N'-ben 1-gyel nagyobb, tehát N' jegyeinek összege csak $7-1=6$-tal kisebb N-énél. Ez a csökkenés N jegyei összegének kétharmad része, tehát N jegyeinek összege 9. – Ha már most N utolsó jegye 7, akkor első két jegyének összege 2, innen N-re 207, 117 és 027 adódik, az utóbbi azonban nem valódi háromjegyű szám. Hasonlóan kapjuk – utolsó jegynek 8-at, 9-et véve – a 108, 018 és 009 számokat.

N tízes helyi értékű jegyét 9-nek véve N' tízes jegye $9+1=10$-ből 0-nak, azaz 9-cel kisebbnek adódik, százas jegye pedig 1-gyel nagyobbnak – hacsak nem N százas jegye is 9. Ha N százas jegye kisebb 9-nél, akkor N' százas jegye 1-gyel nagyobb, tehát N' jegyeinek összege $7+9=16$-tal csökken és 1-gyel nő, azaz végeredményben 15-tel csökken. Ez azonban nem lehet egész szám két harmadrésze, s így a feladatnak ilyen megoldása nincs. – Ha végül N százas jegye is 9 volna, akkor N' jegyeinek összege $7+9+9=25$-tel csökkenne és – az ezres helyi értékben – 1-gyel nőne, tehát 24-gyel csökkenne. – Ebből a jegyek összege 36 lenne, ami lehetetlen, mert háromjegyű szám jegyeinek összege legfeljebb $3\cdot 9=27$, – tehát ilyen megoldás sincs.

Ezek szerint feladatunknak csak a 207, 117 és 108 számok tehetnek eleget. Mindhárom meg is felel, mert a 3-mal nagyobb 210, 120, 111 számban a jegyek összege 3, harmada a 9-nek.

Megjegyzések. 1. Sok versenyző próbálgatás útján találta meg a fenti számokat. Ezzel persze nem bizonyították, hogy csak ez a három megoldás van. – Többen kellő indokolás nélkül kimondták, hegy a jegyek összege csak 9 lehet, vagy hogy az utolsó jegy csak 7, 8, vagy 9 lehet. Mindezek nem tekinthetők teljes értékű megoldásnak.

2. Tetszetősen indul, de sokkal több munkával vezet célhoz a következő gondolatmenet. Mivel N' jegyeinek s' összege harmada N jegyei összegének, azért N jegyeinek összege: $s=3s'$, osztható 3-mal, és ezért ugyanez áll magára N-re is. Így $N'=N+3$ is osztható 3-mal, ezért ez áll s'-re is: $s'=3k$, és így $s=9k$. Háromjegyű számban a jegyek összege legfeljebb 27, így $s=9$, vagy 18, vagy 27. Könnyű belátni, hegy 999, az egyetlen 27 jegyösszegű háromjegyű szám, nem megoldás, de az $s=18$ lehetőségnek vizsgálata hosszadalmas. Az $s=9$ feltevésből – a fentihez hasonlóan – könnyen adódik a három megoldás.

Lukács Ottó, Scharnitzky Viktor

Haladók (II. osztályosok) *versenye.*

1 feladat. *Mutassuk meg, hogy a*

$$3(p+2)x^2-px-(4p+7)=0$$

egyenletnek p bármely (valós) értéke mellett van (valós) gyöke.

I. megoldás: A bizonyítandó állítás fennállásának szükséges és egyben elégséges feltétele, hogy az egyenlet diszkriminánsa $D\geq 0$ legyen p bármely értéke mellett. A diszkrimináns

$$D=p^2+12(p+2)(4p+7)=49p^2+180p+168, \tag{1}$$

és ez p-nek másodfokú függvénye. E függvény képe parabola, így elég azt bizonyítanunk, hegy e parabola minden pontja a p abszcissza-tengely fölött, vagy a tengelyen helyezkedik el. Helyettesítésekkel nyerjük, hogy a parabola egyes pontjai valóban a p-tengely fölött vannak, pl. $p=0$ esetén $D=+168$. Minthogy a parabola folytonos vonal, ezért, ha volna pontja a p-tengely alatt is, akkor metszenie kellene a tengelyt, és az ilyen pontra $D=0$ volna. Ámde a

$$49\,p^2+180\,p+168=0 \tag{2}$$

egyenlet diszkriminánsa

$$D_1=180^2-4\cdot 49\cdot 168<0,$$

tehát a (2) egyenletnek nincs (valós) gyöke, és az (1) parabola valóban nem metszi a p tengelyt, egészen a p-tengely fölött helyezkedik el.

Megjegyzés. Nem lehet elfogadni (2) gyökeinek megvizsgálása helyett a parabola néhány pontjának ábrázolása után a szemléletre való hivatkozást. Számos versenyző így „bizonyított”.

II. megoldás: (1) átalakításával pusztán számviszonyok alapján is belátható, hogy D a p-nek minden értéke mellett nagyobb 0-nál:

$$D=49\,p^2+180\,p+168=\left(7\,p+\frac{90}{7}\right)^2+\frac{132}{49}.$$

E kifejezés első tagja p bármely értéke mellett pozitív, vagy 0, mert négyzet, a második tagja pozitív.

Ezzel az állításnál valamivel többet bizonyítottunk be. Miután D határozottan nagyobb 0-nál, az adott egyenletnek p bármely (valós) értéke mellett két *különböző* (valós) gyöke van.

2. feladat. *Legyen x pozitív szám. Bizonyítsuk be, hogy*

$$1+\frac{x}{3}>\sqrt[3]{1+x}. \tag{1}$$

I. megoldás:

$$\left(1+\frac{x}{3}\right)^3=1+3\cdot\frac{x}{3}+3\cdot\frac{x^2}{9}+\frac{x^2}{27}.$$

Mivel x pozitív, ezért a jobb oldal minden tagja pozitív. Elhagyva az utolsó két tagot, a jobb oldal kisebbé válik:

$$\left(1+\frac{x}{3}\right)^3>1+x. \tag{2}$$

Innen mind a két oldalból köbgyököt vonva a bizonyítandó állításra jutunk.

Meg kell még mutatnunk, hogy (2)-ről (1)-re következtetve nem követünk el hibát, vagyis a köbgyökvonás helyes bizonyítási lépés. Bizonyítjuk, hogy ha tetszés szerinti a^3, b^3 számokra

$$a^3>b^3,$$

azaz

$$a^3-b^3>0, \tag{3}$$

akkor

$$a>b, \tag{4}$$

azaz

$$a-b>0.$$

Ugyanis (3) bal oldalát tényezőkre bontva nyerjük, hogy

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)=(a-b)\left[\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2\right]>0.$$

Mivel $a-b$-nek az utolsó alakbeli szorzója pozitív, egyenlőtlenségünk helyes marad, ha avval osztjuk. Ezzel éppen a bizonyítandó (4) egyenlőtlenségre jutunk.

Megjegyzés. A kérdéses szorzó 0 is lehet, ti. ha egyszerre fennáll $a+b/2=0$ és $b=0$. Ezekből azonban ellentétbe jutunk feltevésünkkel, ugyanis $a=-b/2=0$ és így $a^3=b^3\ (=0)$.

II. megoldás: Akárhány x_1, $x_2,\dots,x_n$ szám számtani közepén értjük az $\dfrac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}$ számot, mértani közepén pedig az $\sqrt[n]{x_1x_2\dots x_n}$ számot. Általánosan is igaz a következő, $n=2$ esetére közismert egyenlőtlenség: Ha az x_1, $x_2,\dots,x_n$ számok mindegyike pozitív, akkor a mértani középük nem nagyobb, mint a számtani középük. Egyenlőség akkor és csakis akkor áll fenn, ha $x_1=x_2=\dots=x_n$.[1] Legyen most $n=3$, $x_1=x_2=1$, $x_3=1+x$, ekkor feltevésünknél fogva $x_3>x_1$, és így a hivatkozott tétel alapján

$$\frac{1+1+1+x}{3}>\sqrt[3]{1\cdot1\cdot(1+x)},$$

ami bizonyítandó volt.

Megjegyzések. Eszerint tételünk már $x>-1$-től kezdve fennáll, mert már ekkor teljesül $x_3=1+x>0$, kivéve mégis az $x=0$ esetet, amikor a két oldal egyenlő.

A bizonyítandó állítás más irányú általánosítása: Legyen $x>-1$, $x\neq0$ és $n>1$, egész szám, ekkor

$$1+\frac{x}{n}>\sqrt[n]{1+x}.$$

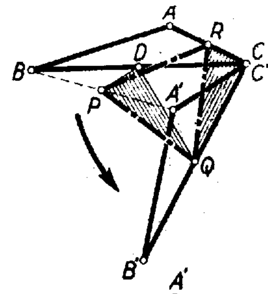
Mind a két általánosításra rámutatott dolgozatában *Bollobás Béla.*

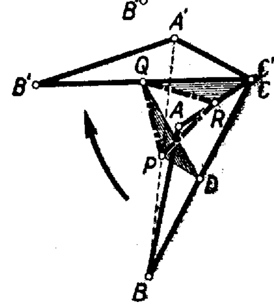
Meg lehet mutatni, hogy a szóban forgó egyenlőtlenségnek az $x>-9$, $x\neq0$ számok tesznek eleget.

3. feladat. *Egy ABC háromszöget forgassunk el a C csúcsa körül $60°$-kal és jelöljük az elforgatott háromszöget $A'B'C'$-vel ($C'\equiv C$). Bizonyítsuk be, hogy az $A'B$, $B'C$ és $C'A$ szakaszok felezőpontjai egy szabályos háromszög csúcsai.*

[1] Bizonyítását lásd pl. *Kürschák – Hajós – Neukomm – Surányi:* Matematikai Versenytételek I. 111. o.

Megoldás: A kérdéses felezőpontokat rendre P, Q, R-rel jelölve azt bizonyítjuk, hogy a PQR háromszögnek QP és QR oldalai egyenlők és egymásból $60°$-os elforgatással állnak elő. Evégett a BC oldal D felezőpontját segítségül véve megmutatjuk, hogy a QDP háromszög $60°$-os forgatással áll elő a QCR háromszögből.





A QD szakasz a $CB'B$ szabályos háromszögnek középvonala, így a CQD háromszög is szabályos, tehát a Q pont D-ből az eredeti forgatással áll elő, és $QD = QC$; továbbá QD ugyanazon irányú $60°$-os forgatással keletkezik QC-ből, mint amelyikkel CQ a CD-ből, vagyis amelyik forgatással $A'B'C'$-t az ABC-ből képeztük. Hasonlóan a DP szakasz a CBA' háromszögnek középvonala, így fele a CA' oldalnak, egyszersmind CA-nak is – mert a $CA'A$ háromszög szabályos –, tehát egyenlő CR-rel; továbbá DP-nek és CA'-nek iránya ugyancsak az eredeti forgatással áll elő CA, azaz CR irányából.

Ezek szerint a QDP szög szárai a QCR szög száraiból ugyanakkora és ugyanazon irányú forgatással állnak elő, tehát e két szög egyenlő. Egyenlők a QDP és QCR háromszögeknek e szögek megfelelő szárain fekvő oldalai is, így a két háromszög egybevágó, és egymáshoz képest valóban $60°$-kal vannak elfordulva. Ennélfogva harmadik megfelelő oldalpárjukra $QP = QR$, és $RQP\sphericalangle = 60°$, amit bizonyítani akartunk.

Megjegyzések. 1. Az ábra több más módon is kiegészíthető oly egybevágó háromszögekkel, amelyek segítségével a PQR háromszög két oldalának egyenlősége bizonyítható. A versenyzők általában a fenti bizonyításénál bonyolultabb utakat követtek; alig volt két versenyző, aki egyformán bizonyított volna. Egyesek nem vették észre, hogy könnyű meghatározni a PQR háromszög két oldalának szögét, ehelyett külön bizonyították be további két oldal egyenlőségét.

2. Az előbbi gondolatmenettel bizonyítható tételünknek következő általánosítása. Ha az ABC háromszögnek a C csúcsa körüli $60°$-os elforgatása után az $A'B$, CB' és AC' szakaszokat tetszőleges, de ugyanazon arány szerint osztjuk (pl: mindegyiket harmadoljuk), az osztópontok szabályos háromszöget alkotnak.

3. Néhány versenyző észrevette bizonyítandó tételünk kapcsolatát a következő tétellel:[2] *„Az OAB és $OA'B'$ ellentétes körüljárású szabályos háromszögek O csúcsa közös. Bizonyítsuk be, hogy ... az AA', OB és OB' ... szakaszok felezőpontjai szabályos háromszög csúcsai."* – A versenyfeladatban az ABC háromszög $60°$-os elforgatása során keletkező CAA' és $CB'B$ háromszögek C csúcsa közös, és körüljárásuk ellentétes. Ábránk betűzését úgy átírva, hogy a közös csúcs jele C, ill. C' helyett O legyen, a többi csúcsé pedig A, B, A' és B' helyett rendre B, A', A és B', tüstént látjuk, hogy az idézett állítás éppen a PQR háromszög szabályosságát mondja ki.

4. A feladatot felfoghatjuk úgy is, hogy az $AA'C$ és $C'BB'$ egyező körüljárású szabályos háromszögek megfelelő csúcsait összekötő szakaszok felezőpontjairól mutattuk meg, hogy újabb szabályos háromszöget alkotnak. Ebben a formában a feladat lényegesen általánosítható, amennyiben sem a közös csúcsnak, sem a háromszögek szabályos voltának nincs benne lényeges szerepe.

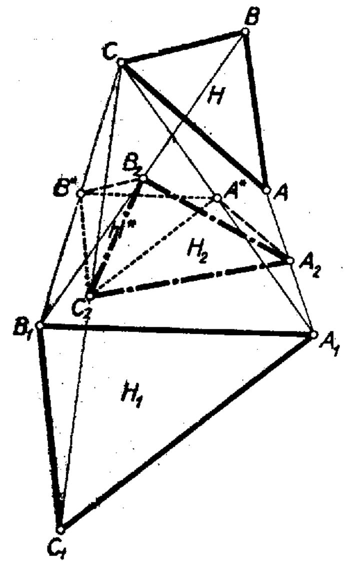
Legyen ABC és $A_1B_1C_1$ két hasonló, egyező körüljárású háromszög, ekkor az AA_1, BB_1, CC_1 szakaszok A_2, B_2, C_2 felezőpontjai is az ABC háromszöghöz hasonló és egyező körüljárású háromszöget alkotnak.

Ez a tétel is könnyen bizonyítható komplex számok segítségével,[3] de a versenyfeladat fenti bizonyításához hasonlóan is bizonyítható.

Nevezzük az állításban szereplő háromszögeket a csúcsok indexezésének megfelelően H, H_1 és H_2 háromszögnek. Összekötve C-t az A_1 és B_1 csúccsal is, a keletkező szakaszok felezőpontja legyen A^* és B^*. Mivel $A^*B^*C_2$ – amit a továbbiakban H^*-gal fogunk jelölni – H_1-nek C-ből felére kicsinyített képe, így elég H_2 és H^*-ról megmutatni, hogy hasonlók és egyező körüljárásúak.

[2] Lásd Reiman István: Geometriai feladatok megoldása a komplex számsíkon, 48. feladat, 63. és 71. o. Tankönyvkiadó 1957, Középiskolai Szakköri Füzetek.

[3] Lásd ugyanott, 77. o. 9. Példa.



A_2A^* és A^*C_2 mint az AA_1C, ill. A_1CC_1 háromszög középvonala párhuzamos és egyirányú az AC, ill. A_1C_1 szakasszal és fele akkora. Hasonlóan B_2B^* és B^*C_2 mint a BB_1C, ill. B_1CC_1 háromszög középvonala a BC, ill. B_1C_1 szakasszal párhuzamos, egyező irányú és fele akkora. Így az $A_2A^*C_2$ háromszögben az A^*-nál levő szög és $B_2B^*C_2$-ben a B^*-nál levő szög egyaránt annak a szögnek a kiegészítő szögével egyenlő, amellyel H_1-el van forgatva H-hoz képest, az ezeket a szögeket közrefogó oldalak aránya pedig (mindkétszer a fönti sorrendben véve) H és H_1 megfelelő távolságainak arányával egyezik meg. Ebből következik, hogy az $A_2A^*C_2$ és $B_2B^*C_2$ háromszögek hasonlóak és egyező körüljárásúak. Ekkor azonban A_2C_2 az A^*C_2-ből és B_2C_2 a B^*C_2-ből egyező irányú és nagyságú elforgatással és ugyanolyan arányú nyújtással keletkezik, s így ugyanezzel az elforgatással és nyújtással keletkezik H_2 is H^*-ból. Ezzel állításunkat igazoltuk.

A bizonyítás könnyen láthatóan abban az esetben is érvényben marad, ha egyes szereplő háromszögek egyenesszakasszá fajulnak. Ez bekövetkezik akkor is, ha H és H_1 szerepét a versenyfeladat $AA'C$ és $C'BB'$ háromszögének adjuk át. Ekkor A^* a $C \equiv C'$ ponttal esik egybe, B^*-nak pedig a feladatmegoldás D pontja felel meg.

Lőrincz Pál, Surányi János