1. feladat. *Hány olyan megoldása van az*

$$|x| + |y| < 1000$$

egyenlőtlenségnek, amelyben x és y egész számok?

I. megoldás: Mindkét ismeretlen értéke csak a 0, ± 1, $\pm 2, \ldots, \pm 999$ számok egyike lehet, de az egyik értékének megválasztása korlátozást jelent a másikéra. Menjünk végig x minden egyes értékén, és állapítsuk meg a mellette lehetséges, vele megoldást adó y-értékek számát; kérdésünkre ezen számok összege adja meg a választ. – Vegyük először x nemnegatív értékeit.

$x = 0$ mellett $|y| < 1000$, azaz $-1000 < y < 1000$, ennek -999, $-998, \ldots, -1$, 0, $1, \ldots, 999$ tesznek eleget, számuk $2 \cdot 999 + 1 = 1999$.

$x = 1$ mellett $|y| < 999$, az előbbinél 2-vel kevesebb megoldás van, mert $y = \pm 999$ már nem felel meg.

Általában is, x valamely értékéről az 1-gyel nagyobbra áttérve $|y|$-nek legnagyobb lehetséges értéke 1-gyel kisebbnek adódik, így y előbbi értékei közül kettőt kell törölnünk, az x, y megoldások száma 2-vel csökken. Így a megoldások számai $x = 0, 1, 2, \ldots, 999$-re számtani sorozatot alkotnak. Az utolsó tag $x = 999$-cel : 1, a tagok száma 1000, és így összegük:

$$\frac{1000(1999 + 1)}{2} = 1000^2.$$

$x = -1$, $-2, \ldots, -999$ esetén $|x| = 1, 2, \ldots, 999$, így az előzőkhöz hasonlóan az ilyen megoldások együttes száma

$$1997 + 1995 + \ldots + 1 = 999^2.$$

Ezzel valamennyi megoldást figyelembe vettük, összes számuk: $1000^2 + 999^2 = 1\,998\,001$.

II. megoldás: A kérdés egyértelmű a következővel: hány olyan x, y egész számpár van, amelyre az $|x| + |y|$ összeg vagy 0-val, vagy 1-gyel, vagy 2-vel, ..., vagy 999-cel egyenlő? Állapítsuk meg tehát általában az $|x| + |y| = k$ egyenlet egész számokban való megoldásainak N_k számát, – ahol k nemnegatív egész szám –, és képezzük ezek összegét $k = 0$, 1, 2, ..., 999-re.

$k = 0$ esetén egy megoldás van: $x = y = 0$.

$k = 1$ esetén négy megfelelő értékpár van:

$1, 0$; $\quad -1, 0$; $\quad 0, 1$; $\quad 0, -1$.

$k \geq 2$ esetén a megoldásokat két csoportba osztjuk aszerint, hogy fellép-e bennük a 0 szám, vagy nem. Az elsőbe a $k = 1$ esethez hasonlóan 4 megoldás jut: $k, 0$; $-k, 0$; $0, k$; $0, -k$. A második csoportban $|x|$ a következő $k - 1$ értéket veheti fel:

$$|x| = j \quad = \quad 1, \quad 2, \quad 3, \ldots, k-1,$$

és evvel $|y|$ is meg van határozva:

$$|y| = k - j = k - 1,\ k - 2,\ k - 3,\ \ldots,\ 1.$$

j minden fenti értékével az előjelek figyelembevétele során $2 \cdot 2 = 4$ megoldás adódik, mert j és $k - j$ mindegyike számára egymástól függetlenül 2-féleképpen választhatjuk az előjelet:

$$j, k - j; \quad -j, \quad k - j; \quad j, -(k - j); \quad -j, -(k - j),$$

tehát itt a megoldások száma $4(k - 1)$. – Végeredményben $k \geq 2$ esetén a megoldások száma $4 + 4(k - 1) = 4k$. Ez a kifejezés $k = 1$ esetén is helyes, ekkor a második csoportba nem tartozik megoldás; $k = 0$-ra azonban nem érvényes.

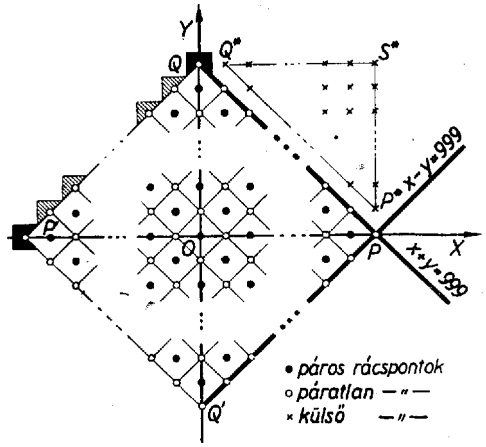
Ezek után $k = 0$, 1, 2, ..., 999-re

$$N = 1 + 4(1 + 2 + 3 + \ldots + 999) = 1 + 4 \cdot \frac{999 \cdot 1000}{2} = 1\,998\,001.$$

Megjegyzés. Ugyanígy, ha s nemnegatív egész szám, akkor az $|x| + |y| < s$ egyenlőtlenség megoldásainak száma egész számokban:

$$N_s = 1 + 4\big[1 + 2 + 3 + \ldots + (s - 1)\big] = 2s^2 - 2s + 1.$$

III. megoldás: Minden egyes megoldást a derékszögű koordinátarendszerben egy ún. rácspont ábrázol, vagyis olyan pont, amelynek mindkét koordinátája egész szám. Jellemezzük e rácspontok helyzetét, majd ennek alapján számukat megállapítva adjunk választ kérdésünkre.



Az adott egyenlőtlenség így is írható:

$$|x|+|y|\le 999.$$

Tekintsük átmenetileg csak azokat a megoldásokat, amelyekben x és y egyike sem negatív. Így $|x|=x$ és $|y|=y$, teljesül tehát

$$x\ge 0,\quad y\ge 0\quad \text{és}\quad x+y\le 999. \tag{1}$$

Az ezen korlátozásoknak eleget tevőrácspontok nem lehetnek az $x=0$ egyenestől (az Y-tengelytől) balra, az $y=0$-tól (X-tengely) lefelé, és az $x+y=999$ egyenestől „jobbra fölfelé”. Más szóval: (1)-nek csak az ezen három egyenessel bezárt OPQ derékszögű háromszög csúcsaiban, oldalszakaszain és belsejében fekvő rácspontok tehetnek eleget, ahol O, P és Q koordinátái: $(0,0)$, $(999,0)$ és $(0,999)$.

Fordítva: ha valamely x, y rácspont eleget tesz ezen geometriai előírásoknak, akkor az x, y számpárra, továbbá – negatív értékeket ismét megengedve – vele együtt a $-x$, y, az x, $-y$ és a $-x$, $-y$ párokra is teljesül az adott egyenlőtlenség. Az utóbbi számpároknak megfelelő rácspontok azoknak az $OP'Q$, OPQ', ill. $OP'Q'$ háromszögeknek a kerületén és a belsejében vannak, amelyek OPQ-ból az Y-ra, X-re, ill. O-ra való tükrözéssel keletkeznek. A négy háromszög együtt hézagtalanul kitölti a $PQP'Q'$ négyzetet, ahol $P'(-999,0)$ és $Q'(0,-999)$.

Számuk megállapítása céljára e négyzet rácspontjait többféleképpen rendezhetjük.

a) Valamelyik tengellyel, pl. az Y-nal párhuzamos sorok (rácsegyenesek) szerinti számlálással lényegében az I. megoldást ismételjük. – Hasonlóan a II. megoldás is értelmezhető pontszámlálásként, meggondolásunkat a $PQP'Q'$-höz hasonló helyzetű azon négyzetek kerületein való számlálás szemlélteti, melyeknek közös középpontja O, és átlója rendre 2, 4, 6, …, 1998 egység, és ehhez hozzávesszük az origót. (x, y-on valós számokat értve pl. $|x|+|y|=999$ a $PQP'Q'$ négyzet kerületének egyenlete.)

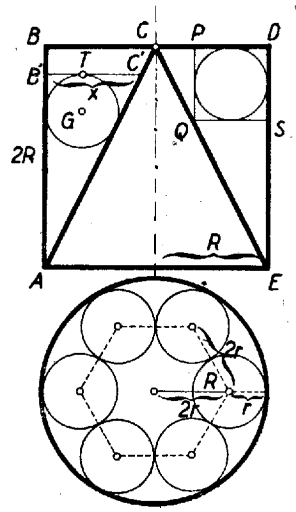
b) A $PQP'Q'$ négyzet oldalaival párhuzamos rácsegyenesek mentén való számlálásban célszerű a rácspontokat két csoportra, páratlanokra és párosakra osztani az $x+y$ összeg páratlan, ill. páros volta szerint, és a számlálást csoportonként végezni. Ugyanis PQ vagy PQ' irányú mozgással sem páros rácspontból páratlanba nem lehet átjutni, sem fordítva, így a pontok e két irányra nézve nem egyszerű hálót alkotnak, számuk nem állapítható meg puszta szorzással. Valóban, a PQ irányú egyenesek egyenlete $x+y=c$ alakú, ahol c állandó, tehát ezeken mozogva $x+y$ párossága is változatlan; és ugyanez áll PQ' irányú egyenesen való mozgás esetén is, mert egyenletük $x-y=d$ alakú, ahol d állandó, és két egész szám különbsége ugyanolyan párosságú, mint az összege. – Minden rácspont vagy páros, vagy páratlan. Könnyen belátható, hogy páratlan rácspontjaink PQ és PQ'-vel párhuzamosan ezer-ezer sort alkotnak, számuk 1000^2, a párosaké pedig hasonlóan 999^2.

c) Rácspontjaink számát különbségként is megkaphatjuk: véve a P és P', ill. Q és Q' pontokon át az Y, ill. X-tengellyel párhuzamos egyenesek által határolt négyzet $1999^2=3\,996\,001$ rácspontját, és ebből elhagyva a $PQP'Q'$-négyzeten kívül, a négy sarki háromszögben fekvőket, mint számunkra feleslegeseket. Ez utóbbiak együttes száma $4(1+2+\ldots+999)=1\,998\,000$. A jobb felső ilyen háromszög csúcsai: $P^*(999,1)$, $Q^*(1,999)$ és $S^*(999,999)$. Így $N=3\,996\,001-1\,998\,000=1\,998\,001$.

d) A rácspontok száma területszámítás útján is megállapítható. Rendeljük hozzá minden R rácsponthoz annak az egységnyi oldalú „elemi” négyzetnek a területét, amelynek középpontja R és oldalai párhuzamosak a tengelyekkel. Így – ha valamely, a koordinátarendszerben fekvő idom területe csupa ilyen négyzetre bontható fel, – akkor annyi rácspontot tartalmaz, ahány egységnyi a területe. – Vegyük hozzá a $PQP'Q'$ négyzethez a kerületén fekvő rácspontokhoz tartozó elemi négyzeteknek a $PQP'Q'$-n kívül fekvő részeit, így egy „fogazott négyzetet” kapunk. A P, Q, P', Q' rácspontok elemi négyzetéből egyenkint 3/4 területegységnyi rész fekszik „kívül”, összesen 3 egység, a PQ, QP', $P'Q'$, $Q'P$ oldalszakaszok belsejében fekvő $4\cdot 998=3992$ rácspontéból pedig egyenkint 1/2 területegységnyi rész, összesen 1996 egység. Mivel még $\overline{PQ}=999\sqrt{2}$, azért a fogazott négyzet területe $2\cdot 999^2+3+1996=1\,998\,001$ egység, megegyezésben fentebbi eredményünkkel.

2. feladat. *Egyenes henger alakú edényünk magassága egyenlő alapkörének átmérőjével. Az álló edénybe előbb egy vele egyenlő alapsugarú és magasságú egyenes kúpot helyezünk – csúcsával fölfelé –, majd 6 egyenlő sugarú gömböt. A gömbök mindegyike érinti az edény falát, a kúp palástját és 2 másik gömböt. Kiemelkednek-e a gömbök az edényből?*

I. megoldás: A henger és a kúp közös tengelyén átmenő bármely $ABCDE$ síkmetszetben az AB henger- és az AC kúpalkotó ugyanakkora BAC szöget zár be. Így r sugaraik egyenlősége folytán mind a 6 gömb középpontja ugyanolyan mélyre esik le, középpontjaik egy vízszintes síkban helyezkednek el. Ezek nyilván egy olyan $2r$ oldalú szabályos hatszög csúcsai, amelynek középpontja a henger tengelyén van, ezért a gömbközéppontoknak a tengelytől való távolsága ugyancsak $2r$, a henger falától való távolságuk r; így a henger (és a kúp) sugara: $R = r + 2r = 3r$.



Tekintsünk egy olyan tengelymetszetet, amely átmegy egy gömbnek G középpontján. A gömbből így kimetszett főkör érinti az AB, ill. AC alkotókat. Tekintsük e főkör érintőjét a gömb legmagasabban fekvő T pontjában, és jelöljük ennek az alkotók (vagy meghosszabbításaik) közti szakaszát $B'C' = x$-szel. Így adataink alapján az $AB'C'$ derékszögű háromszögben $AB' = 2x$, $AC' = \sqrt{5}x$. A főkör ezen háromszögnek beírt köre, ennélfogva szokásos jelölésekkel és az ismert összefüggés alapján:

$$r = \frac{t}{s}, \quad \text{azaz} \quad r = \frac{x^2}{x\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}} = \frac{x}{\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}}.$$

Ennek alapján

$$\frac{x}{R} = \frac{3+\sqrt{5}}{6} < \frac{2+\sqrt{9}}{6} = 1,$$

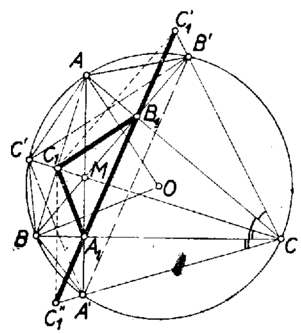
és mivel R pozitív, azért $x < R$. Eszerint $B'C' < BC$, és az $AB'C'$ és ABC háromszögek hasonlósága alapján $AB' < AB$, tehát T alatta van a fedőlap BD szintjének, a gömbök nem emelkednek ki az edényből.

II. megoldás: Ha már megkaptuk az $r = R/3$ összefüggést, akkor szinte számítás nélkül is válaszolhatunk a kérdésre a következő átfogalmazás alapján:

Beilleszthető-e egy gömb az edénybe (a kúp után) úgy, hogy érintse a henger falát és legmagasabb pontja a fedőlap szintjében legyen? Látható, hogy igen. Ugyanis a gömb főkörmetszetét befoglalva egy $2r$ oldalú $DPQS$ négyzetbe, ennek az a Q csúcsa, amely sem a hengeralkotón, sem a fedőlappal való metszésvonalon nincs rajta, éppen a kúp alkotójára esik; ez mutatja, hogy az ilyen beillesztésnek nincs akadálya, ebből a helyzetből eleresztve a gömb lejjebb esik, vagyis még a fedőlap szintjét sem éri el a legmagasabb pontja.

3. feladat. *Bizonyítsuk be, hogy a hegyesszögű háromszög területe egyenlő a köréje írható kör sugarának és a magasságvonalak talppontjai által meghatározott háromszög fél kerületének szorzatával.*

I. megoldás: Legyenek az ABC hegyesszögű háromszög magasságvonalainak talppontjai rendre A_1, B_1, C_1. Ezek belső pontjai a BC, CA, ill. AB szakasznak. Ismeretes, hogy hegyesszögű háromszögben az oldalak felezik a talpponti háromszög külső szögeit.



Ennélfogva ha C_1-nek CA, ill. CB-re vonatkozó tükörképe C_1', ill. C_1'', akkor a B_1C_1 ill. A_1C_1 oldalnak B_1C_1', ill. A_1C_1'' tükörképe a B_1A_1 oldalnak B_1, ill. A_1-en túl való meghosszabbítására esik, tehát $C_1'C_1''$ a talpponti háromszög k kerületével egyenlő. Továbbá a tükrözés folytán a $C_1'CC_1''$ háromszög egyenlő szárú: $CC_1' = CC_1 = CC_1'' = m_c$, és C-nél levő szöge kétszerese az ACB hegyes szögnek. – Az ABC háromszög körülírt körének O középpontja az A, B csúcsokkal együtt a $C'CC_1''$-höz hasonló háromszöget alkot, mert $OA = OB = r$, és $AOB\sphericalangle = 2 \cdot ACB\sphericalangle$. A hasonlóság folytán: $C'C_1'' : AB = CC_1' : OA$, másképpen $k : c = m_c : r$, és ebből $cm_c = rk$, ahol a bal oldal az eredeti háromszög t területének kétszerese. Így $t = rk/2$, amit bizonyítanunk kellett.

Megjegyzés. Derékszögű háromszögben a talpponti háromszög elfajul, mert két csúcsa egybeesik a derékszög csúcsával, pl. ha $ACB\sphericalangle = 90°$, akkor $A_1 \equiv B_1 \equiv C$. Ha a CC_1 szakaszt oda-vissza bejárva elfogadjuk, a „háromszög" „kerületének", akkor a tétel ez esetben is igaz, mert $k = 2m_c$, másrészt $r = c/2$, ennélfogva $kr/2 = cm_c/2 = t$.

A bizonyításban felhasznált hasonlóság tompaszögű háromszögben is fennáll – éspedig akár hegyes szög van C-nél, akár tompa (természetesen bizonyítása kissé módosul), de a $C_1'C_1''$ szakasz nem a talpponti háromszög k kerületét jelenti, hanem a $k - 2h$ különbséget, ahol h a talpponti háromszögnek az az oldala, amelynek végpontjai az eredeti háromszög hegyes szögeinek csúcsából húzott magasságok talppontjai. A módosulás magyarázata az, hogy ez esetben csak a leghosszabb oldal egyenese tartja meg a talpponti háromszögben külső szögfelezői szerepét, a másik kettőé belső szögfelezővé válik.

II. megoldás: Ismeretes, hogy a háromszög M magasságpontjának az oldalakra, más szóval az A_1, B_1, C_1 magasságtalppontokra való A', B', C' tükörképei a körülírt kör kerületén vannak (A' a CC_1'' egyenesen, B' a CC_1'-n). Így az $A'B'C'$ háromszög az $A_1B_1C_1$ talpponti háromszögnek az M középpontból 2-szeresre nagyított képe – mert (pl.) A' az MA_1 egyenesen van –, és $MA_1 = A_1A'$-ből $MA' = 2MA_1$. Eszerint (pl.) $B'C' = 2B_1C_1$. – Hegyesszögű háromszögben az M belső pont, ezért tükörképei az A-t, B-t, C-t nem tartalmazó BC, CA, ill. AB ívre esnek. Az $AC'BA'CB'$ (konvex) hatszög területe 2-szerese az ABC háromszög t területének, mert annál az ABC', BCA', CAB' háromszögek együttes területével nagyobb, ez pedig egyenlő t-vel, mert tükörképeik: ABM, BCM, CAM éppen kitöltik ABC-t.

E hatszögnek az A, B, C csúcsokba befutó oldalpárjai egyenlők, mert pl. $CA' = CM = CB'$, tehát a körülírt kör OA', OB', OC' sugaraival való felbontással területét 3 deltoid területének összegeként is előállíthatjuk:

$$2t = \frac{OA \cdot B'C'}{2} + \frac{OB \cdot C'A'}{2} + \frac{OC \cdot A'B'}{2} = rB_1C_1 + rC_1A_1 + rA_1B_1 =$$
$$= r(B_1C_1 + C_1A_1 + A_1B_1) = rk.$$

Evvel igazoltuk a bizonyítandó állítást.

Megjegyzés. Derékszögű háromszögben $M \equiv C \equiv A' \equiv B'$, így a hatszög elfajul, tompaszögű háromszög esetén pedig hurkolttá válik.