Az x, $2x$, $3x$, $4x$ számok egyike sem lehet egyenlő $\pi/2$-nek valamely páratlan többszörösével, különben (1) bal oldala nincs értelmezve. Felismerjük másrészt, hogy minden egész k esetén $x=k\pi$ kielégíti az egyenletet, ezt a további gyökök keresésében kizárjuk. Minden x_0 gyökkel együtt $x_0+k\pi$, valamint $-x_0$ és $-x_0+k\pi$ is gyök, elég tehát a nyitott $(0,\ \pi/2)$ intervallumra szorítkoznunk.

(1) szélső, valamint közbülső tagjait egy-egy párba kapcsolva

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} 4x&=\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\sin 4x}{\cos 4x}=\frac{\sin(x+4x)}{\cos x\cos 4x},\\ \operatorname{tg} 2x+\operatorname{tg} 3x&=\frac{\sin 5x}{\cos 2x\cos 3x},\end{aligned}$$

ezeket (1)-be beírva, majd a $2\cos u\,\cos v=\cos(u+v)+\cos(u-v)$ azonosságot alkalmazva

$$\begin{aligned}&\sin 5x\left(\frac{1}{\cos x\cos 4x}+\frac{1}{\cos 2x\cos 3x}\right)=\\ &=\frac{\sin 5x(2\cos 5x+\cos 3x+\cos x)}{2\cos x\cos 4x\cos 2x\cos 3x}=0,\end{aligned}$$

ami akkor teljesül, ha

$$\sin 5x=0,\ \text{ és ha}$$

(2) $$2\cos 5x+\cos 3x+\cos x=0.$$

Az első egyenlet megoldása a kijelölt intervallumban

$$5x=k\pi,\qquad x=k\frac{\pi}{5},\qquad k=1,2.$$

Jelöljük (2) bal oldalát y-nal. Ezt a $2\sin u\,\cos v=\sin(u+v)-\sin(v-u)$ és más ismert azonosságok alapján így alakítjuk:

$$\begin{aligned}y&=\frac{2y\sin x}{2\sin x}=\frac{1}{2\sin x}\{2(\sin 6x-\sin 4x)+(\sin 4x-\sin 2x)+\sin 2x\}=\\ &=\frac{2\sin 6x-\sin 4x}{2\sin x}=\frac{2\sin(4x+2x)-\sin 4x}{2\sin x}=\\ &=\frac{2\cos 4x\sin 2x-\sin 4x(1-2\cos 2x)}{2\sin x}=\\ &=\frac{\sin 2x}{\sin x}\{\cos 4x-\cos 2x(1-2\cos 2x)\}=\\ &=2\cos x(4\cos^2 2x-\cos 2x-1).\end{aligned}$$

Eszerint a fentiek figyelembevételével további gyököt csak a

$$4\cos^2 2x-\cos 2x-1=0$$

egyenlet ad. Innen fok egységekben a $(0,\ \pi)$ intervallumban

$$\begin{aligned}\cos 2x&=\frac{1+\sqrt{17}}{8}=0{,}6404 \quad\text{és}\quad &\cos 2x&=\frac{1-\sqrt{17}}{8}=-0{,}3904,\\ 2x&=50^\circ\,11', &2x&=112^\circ\,59'.\end{aligned}$$

Végül a talált gyököket összegyűjtve, (1)-et a 0°, 180° intervallumban a következő értékek elégítik ki:

$$\begin{gathered}x_1=0^\circ;\quad x_2=36^\circ,\quad x_3=72^\circ,\quad x_4=108^\circ,\quad x_5=144^\circ;\\ x_6=25^\circ\,5',\quad x_7=154^\circ\,55',\quad x_8=56^\circ\,29',\quad x_9=123^\circ\,31'.\end{gathered}$$

Kurucz Erzsébet (Polgár, József A. Gimn., III. o. t.)