(2. közlemény)[1]

4. Az összegtartományra vonatkozó tételek

Az összegtartomány fogalmának hasznosítását a felvetett problémára az itt következő két tételnek köszönhetjük.

I. TÉTEL. *Két korlátos konvex alakzatnak az összege is korlátos konvex alakzat.*

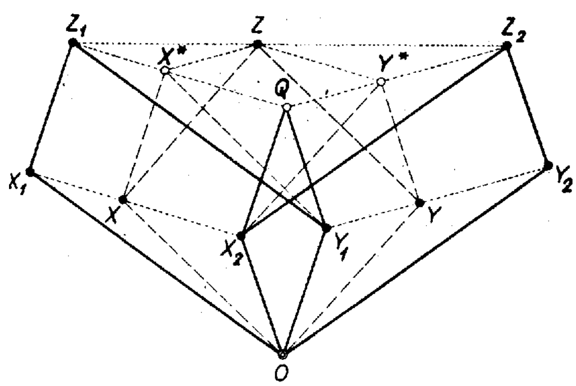
BIZONYÍTÁS. Az állításnak a korlátosságra vonatkozó részét bizonyítandó, állapítsuk meg, hogy két körtartománynak az összege miféle alakzat. A 8. ábrával kísért meggondolásokra támaszkodva azonnal belátható, hogy egy R és egy r sugarú kör összege egy $R+r$ sugarú kör. Ha a $\mathbf{K}$ és $\mathbf{L}$ körtartományok sugara rendre R és r, továbbá, ha egy O kezdőpont felhasználásával az $\mathbf{M}$ összegtartomány adódik, akkor világos, hogy a $\mathbf{K}$ egy belső X pontjának és az $\mathbf{L}$ egy belső Y pontjának megfelelő Z összegpont az $\mathbf{M}$ tartománynak belső pontja. Ha már most $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ a $\mathbf{K}$, illetve az $\mathbf{L}$ tartomány belsejében helyezkedik el, akkor az O-val szerkesztett $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{C}$ tartomány, éppen az X, Y, Z pontokra vonatkozó megállapítás szerint, az $\mathbf{M}$ tartomány belsejében helyezkedik el, vagyis valóban korlátos.

A tétel másik része azt állítja, hogy $\mathbf{A}$-val és $\mathbf{B}$-vel együtt $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{C}$ is konvex. Ezt bizonyítandó csak azt kell igazolni, hogy $\mathbf{C}$ tetszőleges Z_1 és Z_2 pontjaival együtt a Z_1Z_2 szakasz bármely Z pontja is $\mathbf{C}$-hez tartozik.

Legyen az $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ tartományok olyan két-két pontja az X_1, K_2 és Y_1, Y_2, amelyekre nézve érvényesek az O kezdőpontra vonatkozó

$$\overrightarrow{OX_1}+\overrightarrow{OY_1}=\overrightarrow{OZ_1},$$
$$\overrightarrow{OX_2}+\overrightarrow{OY_2}=\overrightarrow{OZ_2}$$

relációk.



9. ábra

A 9. ábra $OX_1Z_1Y_1$ és $OX_2Z_2Y_2$ vektorparalelogrammáival származtattuk a Z_1 és Z_2 összegpontokat. Az ábra Q pontját az OX_2QY_1 vektorparalelogramma szolgáltatja, tehát

$$\overrightarrow{OX_2}+\overrightarrow{OY_1}=\overrightarrow{OQ}.$$

(Az összegeket realizáló átlók az ábrán nincsenek megrajzolva.)
Az X_1X_2 és Y_1Y_2 szakaszokon úgy választottuk az X és Y pontokat, hogy azok osztóviszonya egy előírt λ érték legyen:

$$X_1X : XX_2 = Y_1Y : YY_2 = \lambda \qquad (\lambda > 0).$$

A mondott paralelogrammák párhuzamos oldalait tekintve azonnal belátható, hogy az OY_1YY_2 alakzatot az $\overrightarrow{OX_2}$ vektornak megfelelő eltolás $X_2QY^*Z_2$-be és az OX_1XX_2 alakzatot az $\overrightarrow{OY_1}$ vektornak megfelelő eltolás $Y_1Z_1X^*Q$-ba viszi át. Ebből az is nyilvánvaló, hogy

$$Z_1X^* : X^*Q = QY^* : Y^*Z_2 = \lambda.$$

Innen pedig a Z_1QZ_2 háromszög Z_1Z_2 oldalának

$$Z_1Z : ZZ_2 = \lambda$$

osztóviszonnyal definiált Z pontjára nézve nyomban belátható, hogy az X^*, Q, Y^* pontokkal együtt egy paralelogrammát létesít.

[1] Az 1. közlemény 3. lap 7–9 sora így helyesbítendő: „melyeket négyzet keretben forgatva az alakzatok kerületét a keret oldalai hézagtalanul körülsúrolják”.

Minthogy XX^* párhuzamos és egyenlő X_2Q-val, ez pedig OY_1-gyel, továbbá X^*Z párhuzamos és egyenlő QY^*-gal, ez pedig Y_1Y-nal, következésképpen az XX^*Z, X_2QY^* és OY_1Y háromszögek egyező állású egybevágó háromszögek. Ebből már látható, hogy az XZ oldal is párhuzamos és egyenlő az X_2Y^* és OY oldalakkal. Hasonló módon látható be, hogy YZ párhuzamos és egyenlő OX-szel. Tehát az $OXZY$ idom: paralelogramma. Ebből pedig

$$\overrightarrow{OX} + \overrightarrow{OY} = \overrightarrow{OZ}$$

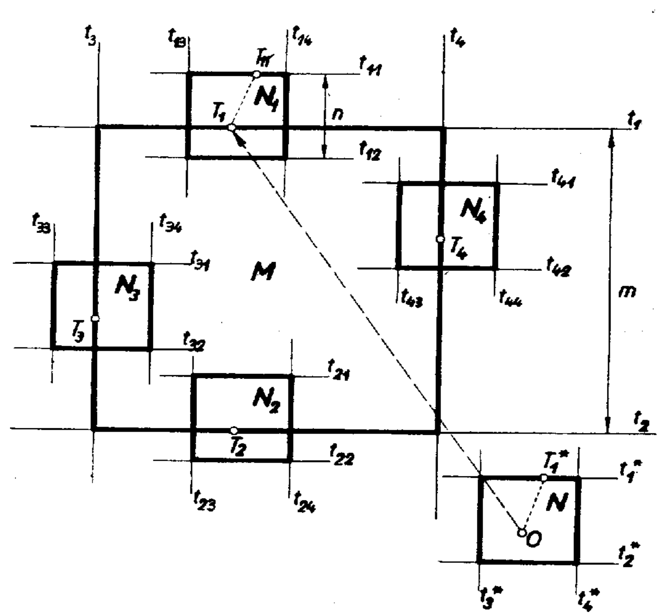
már következik, vagyis a Z_1Z_2 szakasz λ osztóviszonynak megfelelő Z pontja valóban **C**-hez tartozik. Hogyha 0-tól fogva folyton és minden határon túl növekedik a λ értéke, akkor az X, Y és Z pontok rendre leírják az X_1X_2, Y_1Y_2 és Z_1Z_2 szakaszokat. Ezzel be is fejeztük a bizonyítást.

II. TÉTEL. *Négyzetekkel burkolt konvex alakzatok összege is négyzetekkel burkolt konvex alakzat.*

A tételt két tartományból képezett összeg esetén bizonyítjuk. (A tetszőleges számú összeadandó esetét, az itt közöltek alapján, az olvasó is könnyen elintézheti.)

BIZONYÍTÁS. Támaszkodni fogunk a következő állításra, melynek helyes volta a 8. ábrával kapcsolatos fejtegetések alapján azonnal belátható. Ha az **M** és **N** négyzetek állása megegyezik, akkor az $\mathbf{M} + \mathbf{N} = \mathbf{S}$ összegtartomány is egy ugyanolyan állású négyzet; ha e négyzetek oldalhossza rendre m, n és s, akkor $m + n = s$.

Legyenek **A** és **B** négyzetekkel burkolt konvex alakzatok, s legyen a **B** tartomány egy tetszőleges támasznégyzete **M**, az **N** pedig **A**-nak **M**-mel megegyező állású támasznégyzete (10. ábra).



10. ábra

Legyen az $\mathbf{A}+\mathbf{B} = \mathbf{C}$ összegtartomány előállításához használt O kezdőpont **A**-nak (következésképpen **N**-nek is) egy belső pontja. Világos, hogy az O kezdőpont használatával szerkesztett $\mathbf{M}+\mathbf{N} = \mathbf{S}$ összegnégyzet a **C** összegtartományt magában foglalja. Ennél több is igaz: **S** a **C** tartománynak támasznégyzete. A támasznégyzet fogalmából ugyanis következik, hogy az **M** támasznégyzet t_k oldalán a **B** tartománynak legalább egy pontja van, legyen egy ilyen a T_k pont. Hasonlóan az **N** támasznégyzet t_k^* oldalán az **A** tartománynak legalább egy pontja van, legyen egy ilyen a T_k^* pont. A $T_k + \mathbf{A} = \mathbf{A}_k$ összegtartomány az **A** tartománynak azzal az eltolásával áll elő, amely O-t a T_k pontba viszi. Ez az eltolás O-nál fogva magával viszi az **A** támasznégyzetét is $\mathbf{N}_k$-ba, az $\mathbf{A}_k$ támasznégyzetébe. A t_k támaszegyenesnek **M**-mel ellentett oldalán **B**-nek nincs pontja, $\mathbf{A}_k$-nak viszont legalább egy pontja van, mert O belső pontja **A**-nak; éspedig ilyen az $\mathbf{N}_k$ támasznégyzet t_{kk} támaszegyenesének az a T_{kk} pontja, amelyre fennáll az

$$\overrightarrow{OT_k} + \overrightarrow{OT_k^*} = \overrightarrow{OT}_{kk}$$

reláció. Másrészt t_{kk}-nak $\mathbf{N}_k$-val ellentett oldalán az $\mathbf{A}_k$-nak nincs pontja. Ezek szerint t_{kk} az $\mathbf{A}_k$ tartománynak, következésképpen a **C** összegtartománynak támaszegyenese.

A **C** tartomány t_{11}, t_{22}, t_{33}, t_{44} támaszegyenesei nyilván egy **S** támasznégyzetet alkotnak, melynek oldala, amint az az ábrából világosan kitűnik:

$$s = m + n. \tag{4}$$

Mindezekből már világos, hogy a **C** tartomány összes támasztéglalapjai négyzetek, vagyis **C** valóban egy négyzetekkel burkolt tartomány.

Ennek a tételnek az alkalmazására nyomban mutatunk egy példát. A 3. ábra – mondjuk – R szélességű REULEAUX-poligonja töltse be a **B** tag szerepét, az **A** szerepét pedig egy r sugarú, vagyis $2r$ szélességű körtartomány. Most az $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C}$ összegtartomány – minthogy $m = R$ állandó és $n = 2r$ állandó – egy $s = R + 2r$ állandó szélességű tartomány. Ez az összegtartomány a 4. ábrán látható. [2]

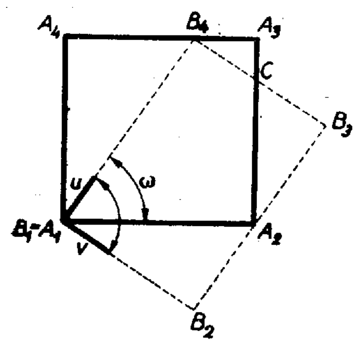
5. Nem egybevágó négyzetekkel burkolt alakzatok

Egy ilyen példa már szerepelt: a négyzet. Nyomban fölmerül a kérdés, van-e másfajta négyszög, mely négyzetekkel burkolható? Ezzel a kérdéssel kapcsolatban pedig az a még általánosabb kérdés is kínálkozik, hogy vannak-e négyzetekkel burkolt konvex poligonok, s ha vannak, milyen speciális formák esetében következik be a négyzetekkel való beburkolhatóság?

Azonnal látni fogjuk, hogy nem könnyű kérdések ezek, nem is törekszünk teljességre, csupán néhány speciális esetre szorítkozunk, amelyeknek ismeretében (a II. tétel segítségével) további, újabb alakzatokat származtathatunk, melyek négyzetekkel beburkolhatók.

III. TÉTEL. *Hegyesszöggel rendelkező konvex poligon nem burkolható be négyzetekkel.*

BIZONYÍTÁS. Állításunk bizonyítására elegendő azt megmutatnunk, hogy bármely a mondott tulajdonságokkal bíró **P** poligonnak van olyan támasztéglalapja, amelynek szomszédos oldalai különbözők. Ha egy konvex **P** poligonnak A_1 csúcsa hegyesszögű, akkor azok között a támasztéglalapok között találunk egy ilyent, amelyeknek egyik csúcsa A_1 (a 11. ábrán ezt a hegyesszöget ω jelzi).



11. ábra

A tételt annak az állításnak az igazolásával bizonyítjuk, hogy van **P**-nek egy A_1 csúcspontú támasztéglalapja.

Ha a **P** poligon ω szögének egyik szárához illesztett támasztéglalap, az $A_1A_2A_3A_4$ alakzat nem volna négyzet, akkor már nincs mit igazolni. Tegyük hát fel, hogy ez az alakzat négyzet.

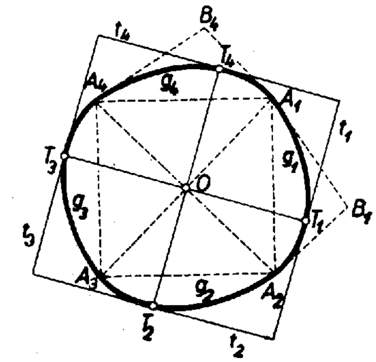
Az ω szög másik szára, az u félegyenes, metszi az A_3A_4 szakaszt, mert különben $\omega < 45°$ lenne, ami azt jelentené, hogy a támasznégyzet A_3A_4 oldalán nincs pontja a **P** poligonnak, ez pedig a támasznégyzet fogalmából kifolyólag abszurdum. Tegyük hát fel, hogy u egy B_4 pontban metszi a szakaszt (esetleg $B_4 \equiv A_3$).

Tekintsük **P** ama támasztéglalapját, melynek A_1-nél levő derékszöge az $(u\,v)\sphericalangle$. Világos, hogy ez a támasztéglalap az u mentén nem lehet a B_1B_4-nél rövidebb, és a v mentén nem lehet a B_1B_2-nél hosszabb; ámde az A_1B_4 átfogójú $A_1A_4B_4$ és az A_1A_2 átfogójú $A_1B_2A_2$ derékszögű háromszögekből nyilván $A_1B_4 > A_1B_2$; következésképpen a **P** tartomány $(u\,v)$ derékszöggel meghatározott támasztéglalapja nem lehet négyzet. Tehát a **P** poligon nem burkolható be négyzetekkel.

A III. tételből azonnal következik, hogy *nincs négyzetekkel beburkolható háromszög;* a háromszög ugyanis legalább két csúcsában hegyesszögű. Az is nyomban következik, hagy ha egy négyszögnek nem mindegyik szöge derékszög, akkor négyzetekkel nem burkolható be; a 360°-os szögösszegből kifolyólag ugyanis, a mondott esetben a négyszög legalább az egyik csúcsában hegyesszögű. Sőt még a téglalap is elégtelen ahhoz, hogy négyzetekkel legyen beburkolható, hiszen a téglalap legkisebb támasztéglalapja önmaga, így nem burkolható négyzetekkel, ha az oldalai különbözők. Eszerint *négyzetekkel burkolt négyszög nincs más, mint a négyzet.*

Befejezésül a 12. ábrán bemutatunk egy négyzetekkel burkolt görbe határvonalú konvex alakzatot is.

[2]Itt csak az alakját és az állását tekintettük az összegtartománynak; ne feledje azonban az olvasó, hogy összegtartomány képezésének előfeltétele egy O kezdőpont megválasztása.



12. ábra

A **G** korlátos konvex tartományt a g zárt konvex görbe határolja. A görbe A_1, A_2, A_3, A_4 csúcsai négyzetet alkotnak és g_1, g_2, g_3, g_4 egybevágó ívekre bontják a görbét. Egy-egy ilyen ív bármely pontjában egy érintője van az ívnek. Ha az ív két végpontjában vett érintők, pl. az A_1B_1 és A_2B_1 egyenesek a mondott végpontokat összekötő (itt pl. A_1A_2) húrral nem-egyenlőszárú háromszöget, egymással pedig tompaszöget (itt pl. $A_1B_1A_2\sphericalangle$-et) zárnak be, akkor biztos, hogy **G** négyzetekkel burkolt, de nem állandó szélességű alakzat.

A leírásból ugyanis világos, hogy **G**-t középpontja, az O pont körül derékszöggel elforgatva, újból a **G** alakzat adódik. Így a derékszögű elforgatással önmagába átmenő ama négyszög, melynek oldalegyenesei a t_1, t_2, t_3 és t_4 egyenesek, nem más, mint négyzet. Ezek a támasznégyzetek pedig nem mind egybevágók. Az A_1 pontban ugyanis az A_1B_4 és A_1B_1 érintők – az ilyen érintőkre fentebb mondott kirovások következtében – úgy állnak, hogy

$$A_4A_1B_4\sphericalangle + A_2A_1B_1\sphericalangle = A_1A_2B_1\sphericalangle + A_2A_1B_1\sphericalangle < 90^\circ$$

és

$$A_4A_1B_4\sphericalangle \neq A_2A_1B_1\sphericalangle.$$

Világos, hogy az A_1B_4 és A_1B_1 egyenes O-tól való távolsága más-más. Ennélfogva az a két támasznégyzet, melynek A_1B_4, illetve A_1B_1 az egyik oldalegyenese, más-más nagyságú. (Ezek a négyzetek az ábrán nem szerepelnek.)