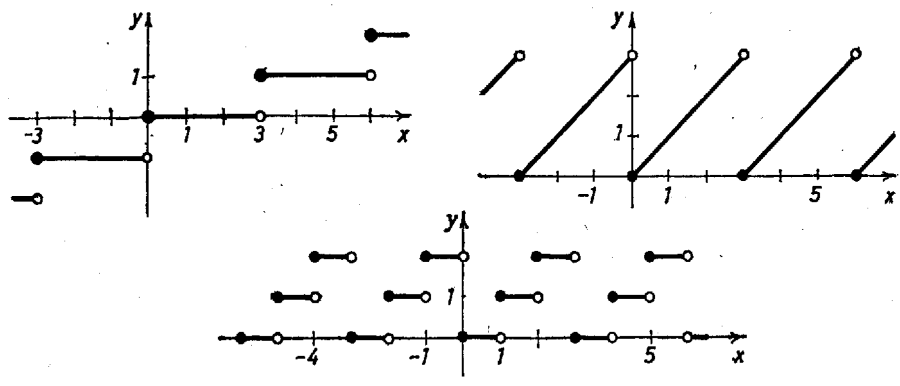
I. megoldás. Ábrázoljuk először (1) első tagját. Az $\dfrac{x}{3}$ függvény képe az x függvény képéből x tengely menti 3-szoros nyújtással áll elő, hiszen amely értéket az utóbbi az a helyen felvesz, azt az előbbi a $3a$ helyen veszi fel. Ugyanilyen nyújtással áll elő $\left[\dfrac{x}{3}\right]$ képe $[x]$ ismert képéből: lépcsőinek hossza 3-szor akkora, mint a magasságuk; más szóval: a függvény a 3-mal osztható egész helyeken ugrik 1-et fölfelé (1_1 ábra).

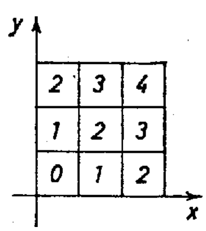


1. ábra

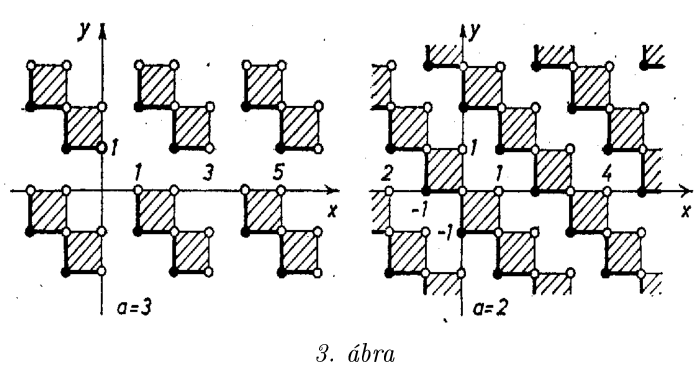
A 3-mal való szorzás a függvény képében 3-szoros nyújtást jelent az y tengely irányában, így $3\left[\dfrac{x}{3}\right]$ képe az $[x]$ képéből mindkét irányú, vagyis origó centrumú 3-szoros nagyítással áll elő. Ennélfogva ugyanez a transzformáció állítja elő az $x-3\left[\dfrac{x}{3}\right]$ függvény képét az $x-[x]$ függvény (az ún. törtrész-függvény, fűrész-függvény) ismert képéből, hiszen az x függvényt a középpontos nagyítás önmagába viszi át (1_2 ábra). Ez a függvény periodikus, periódusa 3.

Végül ebből $\left[x-3\left[\dfrac{x}{3}\right]\right]$ ugyancsak 3 periódusú függvény (1_3 ábra); mondhatjuk: az $[x]:3$ osztás maradékát adja meg (az egész számok osztásánál szokásos értelemben), így x növekedésével egész számra rálépve két egymás utáni esetben 1-et -1-et nő, a következő ilyen esetben, 3-mal osztható egész értékre rálépve, 2-t csökken.

Ugyanezek állnak (1) második tagjára, így a bal oldal x és y szerint egyaránt periodikus, periódusa 3, továbbá értéke az egész abszcisszájú és ordinátájú rácsegyenesekkel egységnégyzetekre felosztott sík minden kis négyzetében állandó, éspedig annyi, mint bal alsó csúcsában. A $(0;0)$, $(3;0)$, $(3;3)$ és $(0;3)$ csúcsokkal meghatározott négyzet 9 egységnégyzetében felvett értékeket a 2. ábra tünteti fel, ezek alapján a követelménynek megfelelő pontok halmazát az előírt a értékekre a 3_1, 3_2 ábrák vázolják vonalkázással. A jelölt egységnégyzetekhez alsó és bal oldaluk hozzáértendő, ezeknek jobb, ill. felső végpontja nélkül.



2. ábra



3. ábra

II. megoldás. Az egész-rész-függvényt meghatározó (2) egyenlőtlenségrendszerben x helyére $x/3$-at írva és 3-mal szorozva

$$3\left[\frac{x}{3}\right] \le x < 3\left[\frac{x}{3}\right]+3, \qquad \text{azaz} \qquad 0 \le x-3\left[\frac{x}{3}\right] < 3,$$

s így (1) bal oldalának mindegyik tagja csak a $0,\ 1,\ 2$ értékeket veheti fel. $a=3$ mellett tehát csak úgy teljesülhet az egyenlet, ha a bal oldal egyik tagja 1, a másik 2; $a=2$ esetében pedig úgy, hogy vagy mind a két tag 1, vagy az egyik 0, a másik 2.

Vizsgáljuk meg, hogy milyen z értékekre teljesül

$$\left[z-3\left[\frac{z}{3}\right]\right]=b,$$

ahol $b=0$, 1 vagy 2. Ez, ismét (2) szerint azt jelenti, hogy

$$b\leq z-3\left[\frac{z}{3}\right]<b+1,$$

tehát a z szám $3k+r$ alakú, ahol k egész és $b\leq b+1$.

Ezek szerint (1) $a=3$ mellett azokra a pontokra teljesül, amelyeknek koordinátái $x=3m+u$, $y=3n+v$ alakúak, ahol m, n egész és

$$1\leq u<2 \quad \text{és} \quad 2\leq v<3, \quad \text{vagy} \quad 2\leq u<3 \quad \text{és} \quad 1\leqq v<2;$$

$a=2$ esetén pedig az ugyanilyen alakú koordinátákkal jellemzett pontokra, ahol azonban most

$$0\leq u<1 \quad \text{és} \quad 2\leq v<3 \quad \text{vagy} \quad 1\leq u,\ v<2 \quad \text{vagy} \quad 2\leq u<3 \quad \text{és} \quad 0\leq v<1.$$

Ezeket a pontokat a 3_1, 3_2 ábrák bevonalkázott négyzetei ábrázolják, nem számítva hozzájuk felső és jobb oldali határukat.