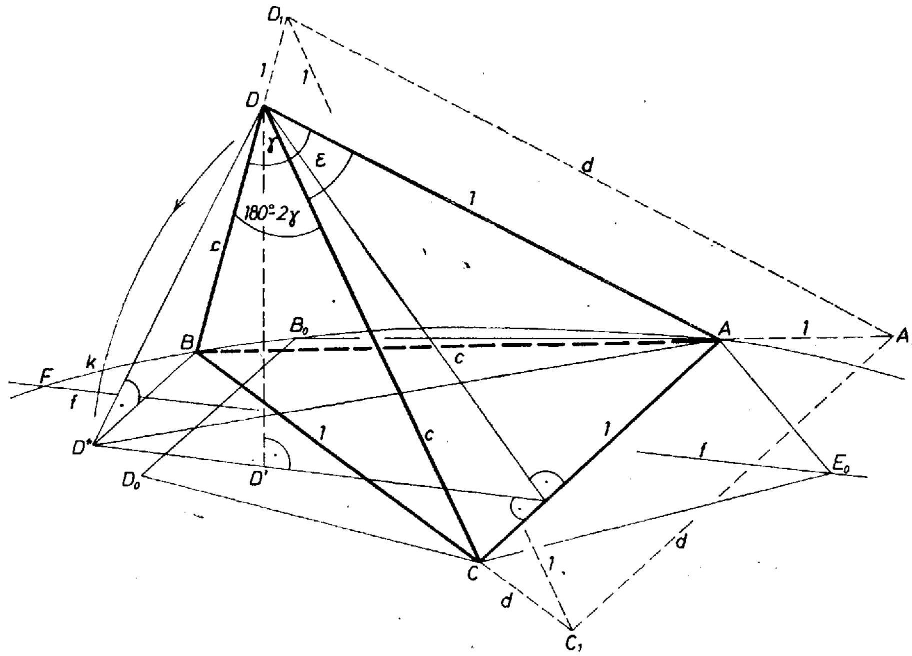
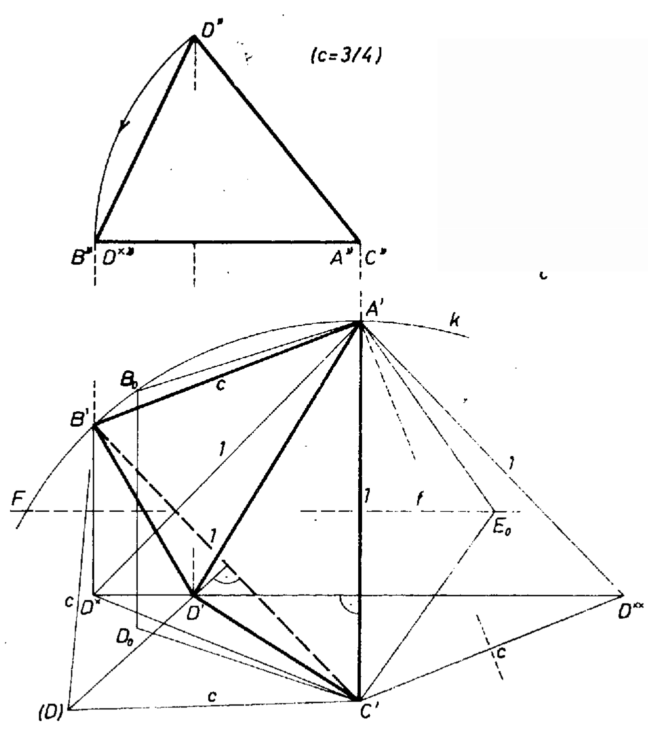
I. megoldás. Legyen egy, az előírásoknak megfelelő gúla $ABCD$ úgy, hogy az ABC alaplapon $BC = CA = 1$, $AB = c$, és ezekhez igazodva az oldalélek $DA = 1$, $DB = DC = c$ (az 1. ábrán távlati rajzban, a 2. ábrán két vetületben úgy, hogy a II. képsík merőleges AC-re; D'-t az ACD, BCD lapok leforgatott ACD^*, $BC(D)$ helyzetéből szerkesztettük: $D^*D' \perp A'C'$ és $(D)D' \perp B'C'$).



1. ábra



2. ábra

Az 1. ábrán jól látjuk, hogy az egyenlő hosszú élek hármasával egymás után csatlakoznak és nyitott törött vonalat alkotnak, az egységnyiek $BCAD$-t, a c hosszúságúak $ABDC$-t. Mind a négy lapháromszög egyenlő szárú és páronként egybevágók, ADC-ben és CBA-ban a szárak hossza 1, az alapé c, ezért $c < 2$, BDA-ban és DBC-ben a két szár c, az alap 1, ezért $c > -1/2$ (a lapok leírásában a testre kívülről ránézve pozitív körüljárás szerint haladtunk).

Csak azokat a gúlákat tekintjük, amelyekben $c \leq 1$, mert minden ilyet $1/c = d$-szeresére nagyítva ($d \geq 1$) ismét a vizsgált osztályba tartozó gúlát kapunk, $3-3$ db egységnyi, ill. d hosszúságú éllel, és 6 élének kölcsönös helyzete is az előírás szerinti. Valóban, a nagyítás középpontjának B-t véve $BA_1 = BD_1 = 1$, $BC_1 = d$, rendre D_1, A_1, B, C_1

felel meg A, B, C, D-nek (tükörkép!), és a fenti két jellemző törött vonal $A_1BD_1C_1$-ben (1-élek), ill. $D_1A_1C_1B$-ben (d-élek) adódik. Eszerint c keresett alsó korlátjának reciproka megadja d felső korlátját.

Forgassuk bele az ACD háromszöget AC oldala körül az ABC háromszög síkjába úgy, hogy D új helyzetében AC-nek ugyanazon az oldalán legyen, mint B, és jelöljük ezt az új helyzetet D^*-gal. Az ACD^*, ACB háromszögek egybevágók, mert megfelelő oldalaik egyenlők (AD^*-nak BC felel meg). Mivel AC oldaluk közös, e két háromszög szimmetrikusan helyezkedik el az AC oldal f felező merőlegesére nézve, és $BD^* \parallel AC$. Forgatás közben a D pont az AC-re merőleges síkban mozog, így DD^* merőleges az AC-vel párhuzamos BD^*-ra, vagyis a BD^*D háromszögben D^*-nál derékszög van, ezért $c = BD > BD^*$.

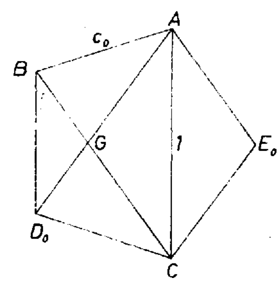
Helyezzünk az AC szakaszra egy $AE_0CD_0B_0$ szabályos ötszöget – melynek tehát AC átlója – úgy, hogy B_0 az AC egyenesnek ugyanazon az oldalán legyen, mint B. A B, B_0 pontok a C körüli, egységnyi sugarú k körön vannak, pontosabban annak kisebbik AF ívén, ahol F a k és f metszéspontja. Megmutatjuk, hogy B a B_0F íven van.

Láttuk, hogy B-nek f-től mért távolsága, a BD^* szakasz fele kisebb, mint az A-tól mért távolságának a fele. B_0-nak f-től mért távolsága viszont éppen feleakkora, mint az A-tól mért távolsága, és a k kör B_0A ívének pontjai f-től távolabb vannak, mint B_0, A-hoz viszont B_0-nál közelebb vannak. B tehát nem lehet a B_0A íven. Emiatt $AB > AB_0$, vagyis

$$c > c_0,$$

ahol c_0 az egységnyi átlójú szabályos ötszög oldala.

c_0 értéke a következő módon határozható meg. Legyen a CB_0, AD_0 átlók metszéspontja G (3. ábra, B mellé 0 index teendő).



3. ábra

Az ACB_0, B_0GA háromszögek hasonlósága alapján $GB_0 : B_0A = B_0A : AC$, azaz

$$(1 - c_0) : c_0 = c_0 : 1,$$
$$c_0^2 + c_0 - 1 = 0,$$
$$c_0 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

(hiszen az egyenlet másik gyöke negatív).

Ezek szerint a $c \leq 1$ esetben a vizsgált gúla létezésének szükséges feltétele

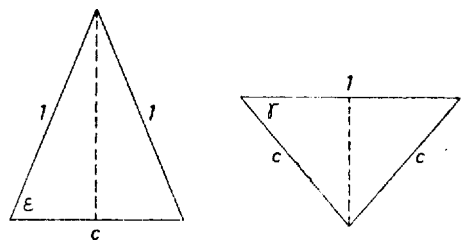
$$1 \geq c > c_0 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \quad (= 0{,}618). \tag{1}$$

Megmutatjuk, hogy ez a feltétel elégséges is. Ha ugyanis c egy tetszőleges valós szám, amelyre (1) teljesül, legyen az ABC háromszögben $AC = CB = 1$, $AB = c$ ($c_0 > 1/2$ miatt (1)-ből következik, hogy ilyen háromszög létezik), és legyen D^* a B tükörképe az AC szakasz f felező merőlegesére nézve. Tükrözzük D^*-ot az AC egyenesre, kapjuk D^{**}-ot. Az $AD^{**}C$ háromszög is egyenlő szárú ($AC = AD^{**} = 1$), ezért CD^{**} felező merőlegese átmegy A-n. Ennek a felező merőlegesnek B ugyanazon az oldalán van, mint C, tehát $BC < BD^{**}$, és mivel $BC \geq c$, azért $BD^{**} > c$. Ha tehát a D^* pontot AC körül a D^{**} helyzetbe forgatjuk át, a B-től mért távolsága valamelyik közbülső helyzetben c-vel lesz egyenlő. Jelöljük ezt a közbülső helyzetet D-vel, ekkor $ABCD$ a kívánt tulajdonságú tetraéder, hiszen $AC = BC = AD = 1$, és $AB = BD = DC = c$.

A 2. bekezdés végén mondottak alapján a kérdéses gúla létezésének szükséges és elégséges feltétele most már:

$$\frac{\sqrt{5} - 1}{2} = c_0 < c < \frac{1}{c_0} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}. \tag{2}$$

II. megoldás. A fenti jelöléseket használva továbbra is a $c \leq 1$ esetet tekintjük. Legyen a szárral szemben fekvő szög az egységnyi szárú lapháromszögben ε, a c szárúban γ, így $c \leq 1$ alapján $\varepsilon \geq 60^\circ$, $\gamma \leq 60^\circ$ és $180^\circ - 2\gamma \geq 60^\circ$, így D-ben a három él közti szögek legkisebbike a $BDA\sphericalangle$ (4. és 1. ábra).



4. ábra

Felhasználjuk, hogy *triéder két oldalának* (más szóval élszögének) *összege nagyobb a harmadiknál.* Eszerint a D csúcsú triéderben fennáll

$$\begin{aligned} BDA\sphericalangle + CDA\sphericalangle &> BDC\sphericalangle, \\ \gamma + \varepsilon &> 180^\circ - 2\gamma, \\ \varepsilon &> 180^\circ - 3\gamma \geqq 0^\circ, \end{aligned}$$

és mivel a cosinusfüggvény a $(0,\, 90^\circ)$ intervallumban monoton csökken:

$$\cos\varepsilon < \cos(180^\circ - 3\gamma) = -\cos 3\gamma = 3\cos\gamma - 4\cos^3\gamma,$$
$$\frac{c}{2} < \frac{3}{2c} - \frac{1}{2c^3}.$$

Innen $c > 0$ alapján

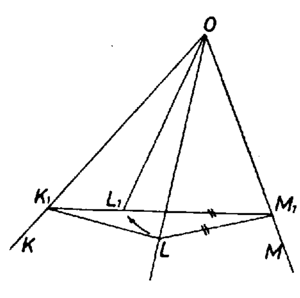
$$c^4 - 3c^2 + 1 = \left(c^2 - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} = \left(c^2 - \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(c^2 - \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right) < 0,$$

a tényezők ellentett előjelűek, és $c^2 \leq 1$ alapján az első negatív, tehát a második pozitív, és ebből

$$c^2 > \frac{3-\sqrt{5}}{2} = \frac{6-2\sqrt{5}}{4} = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2, \qquad c > \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Tovább az I. megoldás szerint haladhatunk.

Megjegyzés. A felhasznált segédtétel bizonyításában elég a legnagyobb oldalról belátni, hogy kisebb a másik kettő összegénél.



5. ábra

Legyen $KOM\sphericalangle \geq LOM\sphericalangle$ (5. ábra), vágjuk fel az OL élt és forgassuk rá az LOM lapot OM körül KOM-re, legyen L új helyzete (a KOM szögtartományban, vagy az OK félegyenesen) L_1. Messe egy, az L_1-en átmenő egyenes OM-et M_1-ben, OK-t K_1-ben. Így

$$K_1L + LM_1 > K_1M_1, \qquad LK_1 > K_1M_1 - L_1M_1 = K_1L_1,$$

hiszen $L_1M_1 = LM_1$. Mivel végül az OK_1L és OK_1L_1 háromszögek O-ből induló oldalai páronként egyenlők, azért

$$K_1OL\sphericalangle > K_1OL_1\sphericalangle = KOM\sphericalangle - LOM\sphericalangle,$$

ami egyértelmű állításunkkal.

(Ha L_1 az OK_1 élre esik, állításunk nyilvánvaló.)