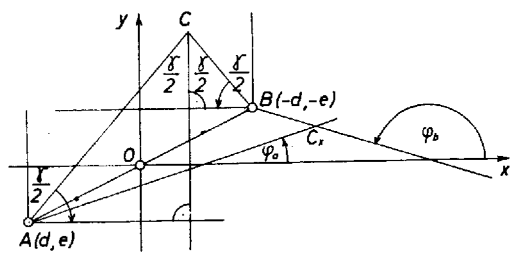
I. megoldás. Az ABC háromszögről feltesszük, hogy $CA \neq CB$, hiszen a $CA = CB$ eset gyorsan áttekinthető és érdektelen eredményt nyújt: a metszéspontot C_x-szel jelölve (hiszen maga C a kiindulási helyzetbeli metszéspont), ez nyilvánvalóan mindig a háromszög szimmetriatengelyén van; és a tengely minden C_x pontja hozzátartozik a mértani helyhez, mert a C_xAC és C_xBC szög egymás képe a tengelyre, így nagyságuk egyenlő és forgási irányuk ellentétes. Csak az AB alap felezőpontja nem tartozik hozzá a mértani helyhez, mert amikor a forgás közben AC az AB-re jut, ugyanakkor BC a BA-ra, így minden pontjuk közös, nincs egyértelmű metszéspont.

Legyen az AC egyenes forgási iránya az, amelyben az AC félegyenest π-nél kisebb elfordulás viszi át AB-be (1. ábra).



1. ábra

Amely pillanatban mindkét egyenes megtett elfordulása az ACB szög felének pótszöge, akkor mindkettő merőlegesen áll ennek a szögnek a felezőjére (és $CA \neq CB$ miatt azt különböző pontokban metszik), tehát párhuzamosak, metszéspont nem jön létre. Nincs metszéspont a további $90°$-os elfordulás helyzetében sem.

Vezessünk be koordináta-rendszert, válasszuk ennek y tengelyét az ACB szög belső szögfelezőjével párhuzamosnak, origója legyen az AB oldal felezőpontja, és legyenek A koordinátái $(d,\ e)$, így B koordinátái $(-d,\ -e)$, ahol $d \neq 0$, különben a szögfelező nem választhatná szét A-t és B-t, továbbá $e \neq 0$, mert háromszögünk nem egyenlő szárú.

Az indulási helyzetben AC irányszöge $\dfrac{\pi-\gamma}{2}$ (az abszcisszatengelyhez viszonyítva), BC-é $\dfrac{\pi+\gamma}{2}$, így a szögsebesség közös abszolút értékét egységnyinek véve, t idő múlva az irányszögek

$$\varphi_a = \frac{\pi-\gamma}{2} - t \quad \text{és} \quad \varphi_b = \frac{\pi+\gamma}{2} + t,$$

vagyis a mozgás bármely pillanatában $\varphi_a + \varphi_b = \pi$. Ezért iránytangenseikre $m_a + m_b = 0$, a $\varphi_a = \varphi_b = \pi/2$ érték kivételével. A kivett esetet már elintéztük, úgyszintén a $\varphi_a = 0$ esetet is. Minden más esetben a két egyenes egyenlete

$$y - e = m_a(x - d),$$

illetőleg

$$y + e = m_b(x + d) = -m_a(x + d),$$

így C_x metszéspontjuk koordinátái m_a-val kifejezve

$$x_c = -\frac{e}{m_a},$$

$$y_c = -m_a d \text{ mivel már } m_a \neq 0).$$

Innen az m_a paraméter kiküszöbölésével a két koordináta összefüggése

(1) $$x_c y_c = de \qquad (\neq 0).$$

Ez hiperbola egyenlete, melynek középpontja AB felezőpontja, aszimptotái párhuzamosak a C-nél levő belső és külső szög felező egyeneseivel.

Maga az A és B pont is rajta van a hiperbolán, hiszen koordinátáik kielégítik (1)-et, másrészt a mértani helyhez is hozzátartoznak, hiszen egy helyzetben AC átmegy B-n, és egy másikban BC átmegy A-n.

A hiperbola minden, az A-tól és B-től különböző C_x pontja is hozzátartozik a mértani helyhez, ugyanis a C_xA egyenes iránytangense

$$\frac{y_c - e}{x_c - d} = \frac{\dfrac{de}{x_c} - e}{x_c - d} = -\frac{e}{x_c},$$

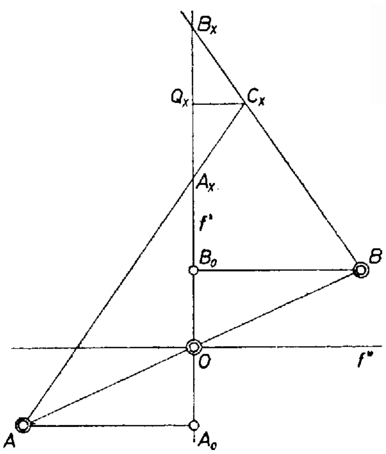
($x \neq 0$, mert a hiperbolának nincs pontja az y-tengelyen és $C_x \neq A$ miatt $x_c - d \neq 0$), ill. hasonlóan a C_xB iránytangense

$$\frac{y_c + e}{x_c + d} = \frac{e}{x_c},$$

összegük 0, ezért a két egyenes irányszöge π-re egészíti ki egymást, tehát ez a helyzet a forgás közben előáll.

Ezek szerint a mértani hely ($CA \neq CB$ esetén) a mondott hiperbola.

Megjegyzések. 1. Elemi úton is megkapható, hogy – felvéve az AB oldal O felezőpontján át az f-fel párhuzamos f' és a rá merőleges f'' egyenest – C_x-nek ezektől mért távolságai fordítva arányosak egymással, ez pedig hiperbolát jelent (2. ábra, csak a $\gamma/2$ pótszögénél kisebb elfordulási szögekre szorítkozva).



2. ábra

Messe f'-t AC_x az A_x, BC_x a B_x pontban, és legyen A, B, C_x vetülete f-en rendre A_0, B_0, Q_x. Ekkor nyilvánvalóan

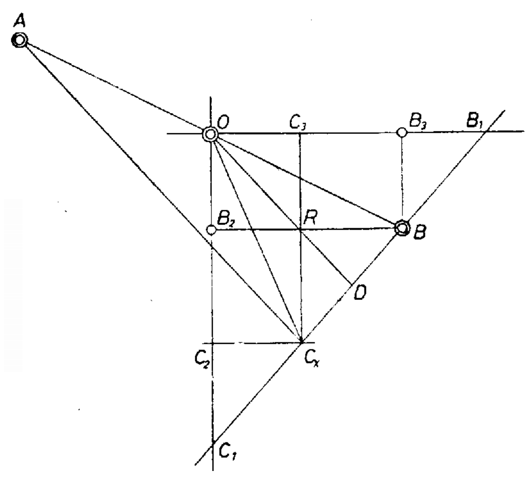
$$AA_0 = BB_0, \quad A_0A_x = B_0B_x, \quad A_xB_x = A_0B_0, \quad Q_xB_x = OB_0, \quad B_0B_x = OQ_x,$$

és a $C_xB_xQ_x$ és BB_xB_0 háromszögek hasonlóságából

$$\frac{Q_xC_x}{Q_xB_x} = \frac{Q_xC_x}{OB_0} = \frac{B_0B}{B_0B_x} = \frac{B_0B}{OQ_x},$$
$$C_xQ_x = (BB_0 \cdot OB_0) \cdot \frac{1}{OQ_x},$$

ahol a zárójelbeli szorzat állandó.

2. Ugyancsak elemi a következő bizonyítás is (de ebben sem tekintünk nagyobb elfordulásokat, sem a szakaszok előjelét). Messe az ABC_x), háromszög AC_x-szel párhuzamos OD középvonala az AC_xB szög felezőjét R-ben (3. ábra).



3. ábra

Ekkor $DR = DC_x = DB$, így Thalész tétele alapján $RB \perp C_xR$.

Messe továbbá BC_x, az O-n át RC_x szel és RB-vel párhuzamosan húzott egyeneseket C_1 ben, ill. B_1-ben, és legyen C_x vetülete ezeken C_2, C_3, a B-é pedig B_2, B_3. Ekkor D a B_1C_1-et is felezi, így $B_1B = C_1C_x$, ezért a B_1BO és C_1C_xO háromszögek területe egyenlő, ugyanez áll a B_1BB_3 és $C_xC_1C_2$ háromszögekre is, hiszen egybevágók, tehát ezeket elvéve OB_3B és OC_xC_2 háromszögek területe egyenlő és ennélfogva az OB_3BB_2, $OC_3C_xC_2$ téglalapok területe is egyenlő: $OC_3 \cdot OC_2 =$állandó.

Lényegében azt a tulajdonságát használtuk itt fel a *hiperbolának*, hogy *bármely szelőjének felezőpontjára nézve az aszimptotákkal való metszéspontok* (ugyancsak) *egymás tükörképei.*

3. Megoldható a feladat projektív geometriai ismeretek fölhasználásával is, lásd az ezen számunk 97. oldalán olvasható cikket.