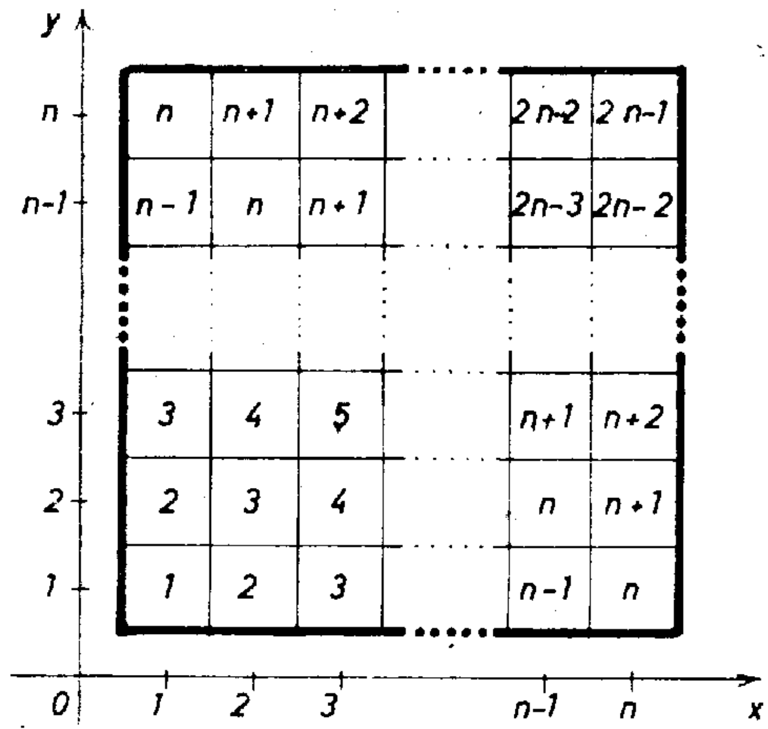
Síkbeli pontrendszer súlypontja (tömegközéppontja) – mint a fizikából ismeretes – az a pont, amelybe a rendszer össztömegével egyenlő (szokásos jelöléssel $\sum m$) tömeget gondolva, ennek bármely (forgási) tengelyre számított nyomatéka egyenlő a rendszer egyes tömegei nyomatékának összegével. A nyomatékot a tömeg és a tengelytől mért (előjellel együtt értett) távolság (kar) szorzata adja. A tömegközéppont helyzetét két különböző irányú tengelytől mért távolságával határozhatjuk meg (a tengelyeket természetesen a síkban véve). A koordinátatengelyeket úgy célszerű választani, hogy minden mező középpontjának a távolsága a legközelebbi pont távolságának többszöröse legyen.

I. Helyezzük a sakktáblát a szokásos derékszögű koordinátarendszerbe és válasszuk ennek hosszúságegységét úgy, hogy az 1. sor és 1. oszlop közös mezeje középpontjának koordinátái $(1,1)$ legyenek, a 2. sor és 2. oszlop közös mezeje középpontjáé pedig $(2,2)$. Ekkor – a sakkban szokásosan alulról fölfelé számozott – i-edik sor és balról jobbfelé j-edik oszlop közös mezeje középpontjának koordinátái nyilvánvalóan (j,i), az ide tett anyagi pont tömege az első tömegpontrendszer esetében $j+i-1$. Így minden egyes anyagi pontnak az x, y tengelyre vonatkoztatott karját megadja az ordinátája, ill. abszcisszája, másrészt a pontrendszer nyilvánvaló szimmetriája miatt a T tömegközéppont két koordinátája egyenlő, elég x_T abszcisszáját meghatároznunk.



1. ábra

A tömegek összege céljára tekintsük az egyes oszlopokbeli tömegek összegét. Mértékszámaik minden oszlopban fölfelé növekvő, 1 differenciájú számtani sorozatot alkotnak. Az első oszlopban

$$s_1 = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n}{2}(1+n).$$

A 2. oszlop tagjai rendre az 1-gyel nagyobb számok, hiszen a (j,i) középpontú mező száma $j+(i-1)$ alakban írható, tehát $s_2 = s_1 + n$, ugyanígy $s_3 = s_2 + n = s_1 + 2n, \ldots$, az oszlopösszegek szintén számtani sorozatot alkotnak. Az utolsó oszlop összege

$$s_n = n + (n+1) + \ldots + (2n-1) = \frac{n}{2}(3n-1)$$

vagy kellő alakítással:

$$s_n = \frac{n}{2}\left\{(1+n) + 2(n-1)\right\} = s_1 + (n-1)n,$$

így tehát, mint az n összeg összege

$$\sum m = \frac{n}{2}\left\{\frac{n}{2}(1+n) + \frac{n}{2}(3n-1)\right\} = \frac{n^2}{4}\cdot 4n = n^3.$$

A pontrendszernek az y tengelyre vett nyomatékában minden egyes oszlop tömegeinek karja (abszcisszája) közös és egyenlő az oszlop sorszámával, így a fentiek alapján

$$\sum m_k x_k = s_1 \cdot 1 + s_2 \cdot 2 + s_3 \cdot 3 + \ldots + s_n \cdot n =$$

$$= (s_1 + 0\cdot n)\cdot 1 + (s_1 + 1\cdot n)\cdot 2 + (s_1 + 2\cdot n)\cdot 3 + \ldots + \{s_1 + (n-1)n\}\cdot n =$$
$$= s_1(1+2+3+\ldots+n) + n\{(0\cdot 1 + 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \ldots + (n-1)n)\}.$$

(Ebben – a fizikában szokásos – jelölésben a k sorszám valamilyen sorrendben végigfut a sakktábla mezőin.)

A második zárójelbeli kifejezés így alakítható

$$(1^2-1) + (2^2-2) + (3^2-3) + \ldots + (n^2-n) =$$
$$= (1^2+2^2+\ldots+n^2) - (1+2+\ldots+n) =$$
$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{6}(2n-2) = \frac{(n+1)n(n-1)}{3},$$

így

$$\sum m_k x_k = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{n^2(n+1)(n-1)}{3} = \frac{n^2(n+1)}{12}(7n-1).$$

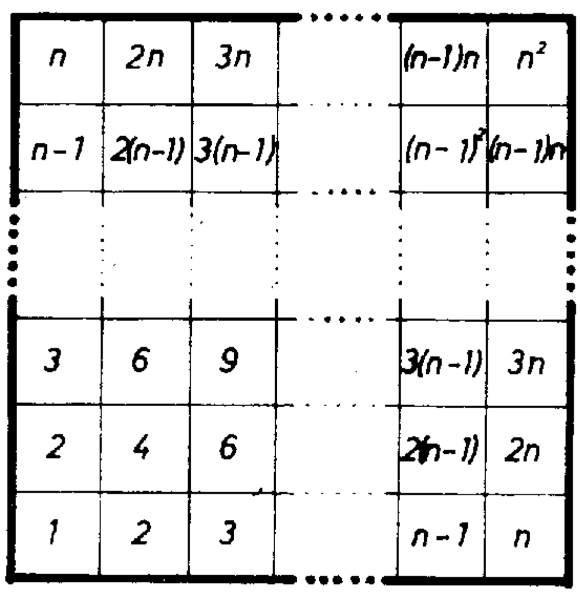
Ezzel az x_T-re vonatkozó egyenlet és megoldása

$$x_T \cdot \sum m = \sum m_k x_k, \qquad x_T = y_T = \frac{\sum m_k x_k}{\sum m} = \frac{(n+1)(7n-1)}{12n}.$$

(A tömegközéppont semmilyen $n(>1)$ esetén sem esik a tábla egy mezejének középpontjába, mert x_T nem lehet egész, hiszen n az $n+1$-hez is, $7n-1$-hez is relatív prím.)

II. A második pontrendszer esetében hasonlóan járunk el. Az első oszlopban álló tömegek összege változatlanul s_1, a 2. oszlopbelieké $2s_1$, hiszen tagról tagra az 1. oszlopbeli szám 2-szeresét írtuk be, hasonlóan a $3., \ldots, n$-edik oszlop tömeg-összege $3s_1, \ldots, ns_1$, tehát

$$\sum m = s_1 + 2s_1 + 3s_1 + \ldots + ns_1 =$$
$$= s_1(1+2+\ldots+n) = s_1^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$



2. ábra

Oszloponként ismét közös az y-tengelytől mért távolság, így

$$\sum m_k x_k = s_1\cdot 1 + (2s_1)\cdot 2 + (3s_1)\cdot 3 + \ldots + (ns_1)\cdot n =$$
$$= s_1(1^2+2^2+\ldots+n^2) = \frac{n^2(n+1)^2(2n+1)}{12},$$

és ezek alapján az U tömegközéppont koordinátái:

$$x_U = y_U = \frac{\sum m_k x_k}{\sum m} = \frac{2n+1}{3}.$$

Papp Zoltán (Debrecen, Fazekas M. Gimn., IV. o. t.)

Megjegyzések. **1.** Első látásra kézenfekvőbb a sakktábla bal alsó sarkát választani a koordinátarendszer origójává. Úgy bonyolultabb számítás eredményeként nyilvánvalóan 1/2-del kisebbnek kaptuk volna a koordinátákat:

$$x'_T = y'_T = x_T - \frac{1}{2} = \frac{7n^2-1}{12n}, \qquad x'_U = y'_U = \frac{4n-1}{6}.$$

Papp Zoltán

2. A $\sum m$ összeg egyszerűen képezhető az átlók bármelyikével párhuzamosan való csoportosítással is.