Az

$$a+b+c=k, \tag{1}$$

$$0<a<b<c, \tag{2}$$

illetőleg

$$0<a\leqq b\leqq c \tag{3}$$

feltételeket teljesítő egész számok egy háromszög oldalai, ha legnagyobbikuk kisebb, mint a másik kettő összege:

$$c<a+b \qquad (\text{azaz } c-b<a), \tag{4}$$

ugyanis a háromszög-egyenlőtlenségek további alakjai (2), ill. (3) miatt teljesülnek.

I. A (2) feltétel esetében (4) alapján

$$a\geqq c-b+1\geqq 2,$$

hiszen

$$c-b\geqq 1. \tag{2a}$$

Mármost $a=2$ csak $c-b=1$ esetén lehetséges, amikor $c+b$ és vele a kerület $(c+b)+2$ mértékszáma is páratlan. Ekkor, $k=2m+1$ jelöléssel a $c-b=1$, $c+b=k-a=2m-1$ rendszerből egyértelműen

$$a=2, \qquad b=m-1, \qquad c=m, \tag{5}$$

és ez megfelel, hacsak $b>a$, $m-1>2$, $m>3$, azaz $k\geqq 9$ esetén. Eszerint

$$a_{\min}=2, \text{ ha } k=9,\ 11,\ 13,\ \ldots$$

Páros k esetén viszont a és $(c+b)$, tehát a és $(c-b)$ is egyező párosságú, így (2a) miatt

$$a\geqq (c-b)+2\geqq 3,$$

és mihelyt $k=2m\geqq 12$, az előbbihöz hasonlóan adódó

$$a=3, \qquad b=m-2, \qquad c=m-1, \tag{6}$$

oldalhármas meg is felel, tehát

$$a_{\min}=3, \text{ ha } k=12,\ 14,\ 16,\ \ldots$$

Az (5), (6) oldalhármasokban egyszersmind c legnagyobb értékét is megkaptuk, hiszen (4) miatt $c<k/2$, és a $k/2$-nél kisebb egész számok közül valóban $k=2m+1$ esetén m a legnagyobb, $k=2m$ esetén pedig $m-1$.

Az x számban foglalt legnagyobb egész szám $[x]$ jelének felhasználásával $c_{\max}$ kapott kétféle kifejezése közös alakban adható meg:

$$\frac{k}{2}-\frac{1}{2}, \qquad \text{ill. } \frac{k}{2}-1, \quad \text{mindenképpen } c_{\max}=\left[\frac{k-1}{2}\right].$$

Megkaptuk továbbá (5)-ben és (6)-ban a $b_{\max}$ értéket is, mert bennük a-ra a lehető legkisebb részt használtuk fel k-ból, így a lehető legnagyobb rész maradt $(b+c)$-re és ezen belül b a legkisebb hiánnyal marad alatta c-nek:

$$b_{\max}=c_{\max}-1=\left[\frac{k-3}{2}\right].$$

$a_{\min}$-nak hasonló, egységes kifejezése

$$a_{\min}=3-\left(k-2\left[\frac{k}{2}\right]\right),$$

hiszen itt a ( ) értéke páros k esetén 0, páratlan k esetén 1.

Hasonlóan ugyanazon oldalhármasban lép fel $a_{\max}$ és $c_{\min}$. Ugyanis a-ra. úgy jut legnagyobb rész k-ból, ha b és c a megengedhető legkisebb többlettel múlják felül a-t; másrészt c akkora legkisebb, ha b és a csak a legkisebb hiánnyal maradnak alatta. (2) miatt

$$b\geqq a+1, \qquad c\geqq b+1\geqq a+2, \text{ illetőleg}$$
$$b\geqq c-1, \quad a\leqq b-1\leqq c-2, \text{ így}$$
$$k\geqq 3a+3, \quad \text{illetőleg } k\leqq 3c-3,$$
$$a\leqq\frac{k-3}{3}, \quad \text{illetőleg} \quad c\geqq\frac{k+3}{3}, \tag{7}$$
$$a_{\max}=\left[\frac{k-3}{3}\right], \quad \text{és} \quad c_{\min}=\left[\frac{k+3}{3}+\frac{2}{3}\right]=\left[\frac{k+5}{3}\right],$$

ugyanis (7) jobb oldala $k=3r$, $3r+1$, $3r+2$ esetén rendre $r+1$, $r+4/3$, $r+5/3$, az ezeknél nem kisebb egészek legkisebbike rendre $r+1$, $r+2$, $r+2$, legnagyobb növekedésként $2/3$ mutatkozik a $k=3r+1$ esetben, ennyivel növeltük a [ ]-be írandó számot.

A $k:3$ osztás 3-féle lehetséges maradéka szerint a megfelelő oldalhármas

$$k=3r, \qquad k=3r+1, \qquad k=3r+2$$

esetén rendre a következő:

$$r-1,\quad r,\quad r+1; \qquad r-1,\quad r,\quad r+2, \qquad r-1,\quad r+1,\quad r+2,$$

hacsak

$$\begin{array}{ccc} r>2, & r>3, & r>2. \\ k=9,\ 12,\ 15,\ \ldots & k=13,\ 16,\ \ldots & k=11,\ 14,\ \ldots \end{array}$$

Végül $b_{\min}$ úgy adódik, ha egyrészt $a+b$ a legkisebb – vagyis c a legnagyobb –, másrészt az $(a+b)_{\min}$ értéken belül a a legnagyobb, a^* értékét veszi fel. Mint láttuk, k párossága szerint $c_{\max}$ 1-gyel vagy 2-vel marad alatta az $(a+b)_{\min}$ értéknek, ugyanígy a^* is 1-gyel vagy 2-vel kisebb, mint $b_{\min}$ az $(a+b)_{\min}$ érték párossága szerint, vagyis

(8)
$$c_{\max} \geqq (a+b)_{\min}-2, \qquad a^* \geqq b_{\min}-2, \quad \text{így}$$
$$k=(a+b)_{\min}+c_{\max} \geqq 2(a+b)_{\min}-2=2(a^*+b_{\min})-2 \geqq 4b_{\min}-6,$$
$$b_{\min} \leqq \frac{k+6}{4}, \qquad b_{\min}=\left[\frac{k+6}{4}\right].$$

A $k:4$ osztás 4-féle maradéka szerint a megfelelő oldalhármas:

$k=4s$ esetén:	s,	$s+1$,	$2s-1$,	hacsak	$s>2$,	$k \geqq 12$,
$k=4s+1$ esetén:	s,	$s+1$,	$2s$,	hacsak	$s>1$,	$k \geqq 9$,
$k=4s+2$ esetén:	s,	$s+2$,	$2s$,	hacsak	$s>2$,	$k \geqq 14$,
$k=4s+3$ esetén:	s,	$s+2$,	$2s+1$,	hacsak	$s>1$,	$k \geqq 11$.

Összefoglalva, a (2) feltétel esetén

$$\left.\begin{aligned} 3-\left(k-2\left[\frac{k}{2}\right]\right) \leqq a \leqq \left[\frac{k-3}{3}\right], \\ \left[\frac{k+6}{4}\right] \leqq b \leqq \left[\frac{k-3}{2}\right], \\ \left[\frac{k+5}{3}\right] \leqq c \leqq \left[\frac{k-1}{2}\right], \end{aligned}\right\} \text{ ha } k=9,\ k \geqq 11.$$

$k=9,\ 11,\ 12$ és 14 esetén egyetlen megoldás van, ezekben az egyes oldalak legkisebb és legnagyobb értéke egyenlőnek adódik.

II. Lényegében ugyanígy kapjuk a keresett értékeket a (3) feltétel esetében is. (2a) helyére

(3a)
$$c-b \geqq 0$$

lép, így (4)-ből $a \geqq 1$. Az $a_{\min}=1$ érték a $k=2m+1(\geqq 3)$ esetben adódik ismét a $b_{\max}=c_{\max}=m$ értékekkel egy háromszögben, $k=2m(\geqq 6)$ esetén pedig $a_{\min}=2$, $b_{\max}=c_{\max}=m-1$; közös kifejezéssel

$$a_{\min}=2-\left(k-2\left[\frac{k}{2}\right]\right), \qquad c_{\max}=b_{\max}=\left[\frac{k-1}{2}\right].$$

Továbbá (3) miatt

$$k \geqq 3a, \qquad k \leqq 3c,$$
$$a_{\max}=\left[\frac{k}{3}\right], \qquad c_{\min}=\left[\frac{k+2}{3}\right],$$

végül mivel (8) második egyenlőtlensége helyére $a^* \geqq b_{\min} - 1$ lép, hiszen $b_{\min} - a^*$ értéke 0 vagy 1, azért a fentihez hasonlóan

$$k \geqq 2a^* + 2b_{\min} - 2 \geqq 4b_{\min} - 4,$$
$$b_{\min} \leqq \frac{k+4}{4}, \qquad b_{\min} = \left[\frac{k+4}{4}\right].$$

A talált értékek valóságos fellépését bizonyító oldalhármasok:

k	$2m+1$	$2m$	$3r$	$3r+1$	$3r+2$	$4s$	$4s+1$	$4s+2$	$4s+3$
a	1	2	r	r	r	s	s	$s+1$	$s+1$
b	m	$m-1$	r	r	$r+1$	$s+1$	$s+1$	$s+1$	$s+1$
c	m	$m-1$	r	$r+1$	$r+1$	$2s-1$	$2s$	$2s$	$2s+1$
	$k \geqq 3$	$k \geqq 6$	$k \geqq 3$	$k \geqq 7$	$k \geqq 5$	$k \geqq 8$	$k \geqq 5$	$k \geqq 6$	$k \geqq 3$

Összefoglalva, a (3) feltétel esetén

$$\left.\begin{array}{r} 2 - \left(k - 2\left[\dfrac{k}{2}\right]\right) \leqq a \leqq \left[\dfrac{k}{3}\right] \\[3ex] \left[\dfrac{k+4}{4}\right] \leqq b \leqq \left[\dfrac{k-1}{2}\right] \\[3ex] \left[\dfrac{k+2}{3}\right] \leqq c \leqq \left[\dfrac{k-1}{2}\right] \end{array}\right\} \text{ ha } k = 3,\ k \geqq 5.$$

Kemény András (Budapest, Berzsenyi D. Gimn., III. o. t.)
Romhányi Éva (Szeged, Radnóti M. Gimn., II. o. t.)