Kezdők (I. osztályosok) versenye:

1. feladat: *a-nak mely értékeinél lesz a $97a^2+84a-55$ kifejezés számértéke a-nak többszöröse?*

Megoldás: Azt mondjuk, hogy egy c egész szám többszöröse egy d egész számnak (vagy, hogy c osztható d-vel, vagy d osztója c-nek), ha van olyan q egész szám, amelyre $c=dq$. Oszthatósági kérdésekben célszerű lehet pozitív osztókra szorítkozni, vagyis d-ről, vagy esetleg a definícióban szereplő mindegyik számról feltenni, hogy természetes szám, máskor viszont éppen fordítva, célszerű minden egész számot megengedni.

Azt a kérdést kell tehát megvizsgálni, hogy milyen a egész számokhoz, illetőleg pozitív egész számokhoz van olyan k egész szám, amelyre teljesül a

$$97a^2+84a-55=ka \tag{1}$$

egyenlőség. Az a-t tartalmazó tagokat egy oldalra rendezve és a-t kiemelve

$$(97a+84-k)a=55.$$

Ezek szerint 55-öt kell két pozitív egész, ill. két egész tényező szorzatává alakítani. Pozitív egész tényezős felbontások $1\cdot 55$, $5\cdot 11$, továbbá a tényezők felcserélésével keletkező felbontások, a további egész felbontások pedig úgy keletkeznek, hogy a pozitív felbontások mindkét tényezőjének negatívját vesszük. Így a következő pozitív egész a értékek felelnek meg: 1, 5, 11, 55, az összes egész értékeket tekintve pedig ezekhez negatívjaik: -1, -5, -11, -55 járulnak.

Megjegyzés: Bollobás Béla felvetette azt az általánosabb kérdést is, hogy a-ról nem tételezve fel, hogy egész, milyen a értékekre lesz a szóban forgó kifejezés a-nak egész számszorosa, vagyis milyen (nem feltétlenül egész) a számokra áll fenn (1) egész k-val. A feladat fogalmazása ezt az értelmezést is megengedi, ez a kérdés azonban már nem tárgyalható a fenti módon. A kérdés most az, hogy milyen a-kra teljesül egész k-val a

$$97a^2+(84-k)a-55=0 \tag{2}$$

egyenlet. Itt k akkor és csak akkor egész, ha a $84-k=l$ szám egész. Ezt a jelölést bevezetve az

$$a=\frac{-l\pm\sqrt{l^2+21340}}{194},\quad (l=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots)$$

számok és csak ezek felelnek meg a felvetett követelményeknek.

2. feladat. *Pótoljuk a hiányzó számjegyeket az alábbi osztásban:*

$$\begin{array}{l}
\;\;x\,x\,x\,x\,x\,x : x\,x\,x = x\,x\,8\\
\underline{-\,x\,x\,x\,5\;\;}\\
\;\;\;\;x\,x\,x\,x\\
-\;\;\;\underline{\;9\,x\,x\;}\\
\;\;\;\;\;\;\;x\,x\,x\\
\;\;\;\;\;\;\;\underline{x\,x\,x}
\end{array}$$

Megoldás: Az utolsó részletszorzatból látható, hogy az osztónak, amely 3 jegyű, 8-szorosa is háromjegyű, tehát az osztó kisebb, mint $1000/8=125$.

Az első részletszorzat négyjegyű és utolsó jegye 5. Utóbbiból következik, hogy az osztó utolsó jegye 5, előbbiből pedig az, hogy a hányados első jegye 9 (mivel az osztó 8-szorosa még 3 jegyű) és az osztó legalább $1000/9=111\frac{1}{9}$.

A három megállapításból együtt következik, hogy az osztó csak 115 lehet.

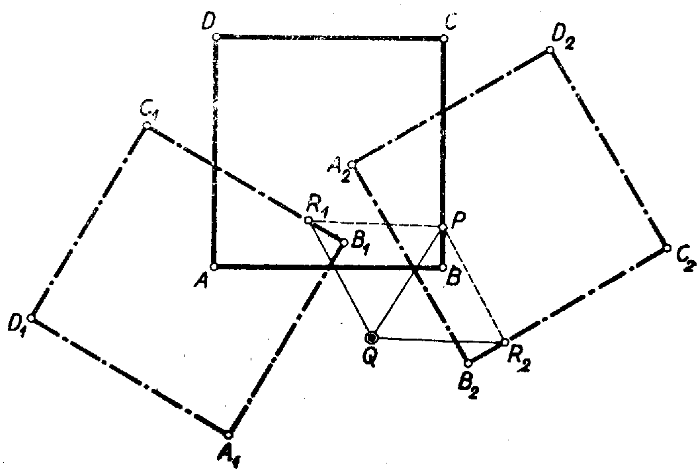
A második részletszorzat 3 jegyű és első jegye 9, így a hányados második jegye 8, mert az osztó 9-szerese 4 jegyű, 7-szerese pedig 900-nál kisebb.

Az osztó és a hányados ismeretében a még ismeretlen jegyek már megállapíthatók:

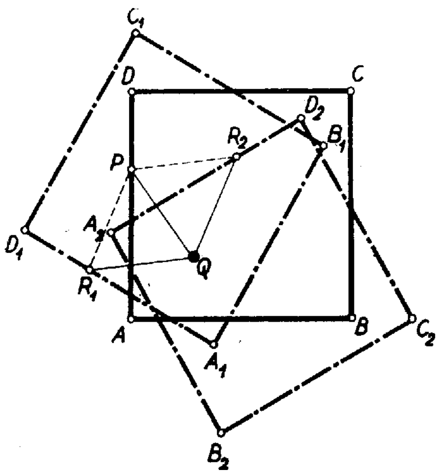
$$\begin{array}{l}
113620 : 115 = 988\\
\underline{1035}\\
\;\;1012\\
\;\;\underline{\;\;920}\\
\;\;\;\;\;920\\
\;\;\;\;\;920
\end{array}$$

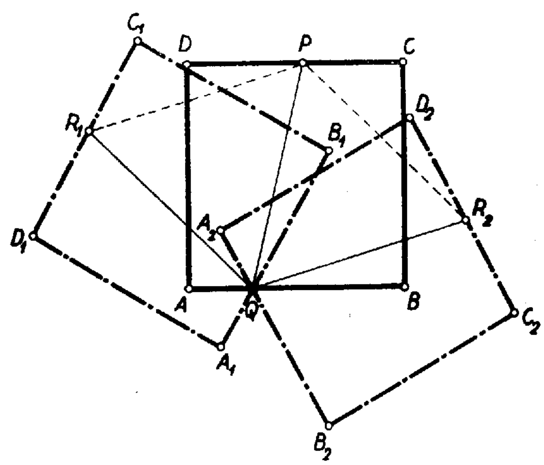
3. feladat. *Fusson végig a P pont az $ABCD$ négyzet kerületén. Legyen Q a síknak egy olyan rögzített pontja, amely nincs rajta a négyzet egyik oldalán sem. Legyen PQR egyenlő oldalú háromszög. Mi az R pontok mértani helye?*

Megoldás: A PQ szakasz fölé két szabályos háromszög írható, amelyeknek PQ közös oldala. Ha egy szabályos háromszög egy csúcsa körül az egyik oldalát megfelelő irányban $60°$-kal elfordítjuk, akkor ez a csúcsból induló másik oldalt fedi. Ha az utóbbi oldalt akarjuk az előbbivel fedésbe hozni, ezt az első forgatással ellentétes irányú $60°$-os elforgatással érhetjük el.



Legyen a PQ szakasz fölé rajzolható két szabályos háromszög PQR_1 és PQR_2 a betűzést úgy választva, hogy QP-t QR_1-be pozitív (az óramutató járásával ellentétes), QR_2-be pedig negatív irányban lehessen 60°-os elforgatással beleforgatni.





Ekkor az R_1 pontok is, az R_2 pontok is egy-egy $ABCD$-vel egybevágó négyzetet, $A_1B_1C_1D_1$-et, ill. $A_2B_2C_2D_2$-t fogják befutni egyszer, míg P végigfut az $ABCD$ négyzeten. Ez a két négyzet úgy keletkezik az adottból, hogy ezt Q körül 60°-kal elforgatjuk pozitív, illetőleg negatív irányban.

Valóban, az $ABCD$ négyzet bármely P pontját Q körül 60°-kal elforgatva pozitív irányban egyrészt az $A_1B_1C_1D_1$ négyzet egy R_1 pontját kapjuk, másrészt viszont R_1 az elmondottak szerint a PQ-ra rajzolható szabályos háromszög egyik csúcsa. Fordítva, ha az $A_1B_1C_1D_1$ négyzet egy R_1 pontját forgatjuk el Q körül negatív irányban 60°-kal, akkor egyrészt az $ABCD$ négyzet egy P pontjába jutunk vissza, másrészt PQR_1 olyan szabályos háromszög, amelyben a QP oldal Q körül pozitív irányú 60°-os elforgatással hozható QR_1-gyel fedésbe. Ugyanez áll pozitív és negatív forgatás felcserélésével az $A_2B_2C_2D_2$ négyzetre vonatkozóan is. Ezzel állításunkat igazoltuk.

Megjegyzések: 1. Az $ABCD$ négyzet semmilyen tulajdonsága nem szerepelt meggondolásainkban, így bármilyen síkidom pontjain is futtatjuk végig P-t, a feladatban leírt eljárással a síkidomnak Q körül pozitív és negatív irányban 60–60°-kal elforgatott képét kapjuk mértani helyül.

2. Meggondolásaink abban az esetben is érvényesek, ha Q a négyzet (illetőleg az adott síkidom) egy pontja, kivéve ha P egybeesik Q-val, amikor szabályos háromszög nem alkotható. Ez esetben célszerű „elfajult szabályos háromszög"-nek tekinteni egy pontot (mely a háromszög három egybeeső csúcsa).

Haladók (II. osztályosok) versenye.

1. feladat. *Egy hatjegyű négyzetszámot kétjegyű részekre vágva megállapítjuk, hogy az utolsó kétjegyű szám megegyezik a középső kétjegyű számmal, míg az első kétjegyű szám a középső kétjegyű számot* 100*-ra egészíti ki. Melyik ez a négyzetszám?*

I. megoldás: A keresett négyzetszámot n^2-tel jelölve feltehetjük, hogy n pozitív egész, mert egy számnak és a negatívjának ugyanaz a négyzete. Mivel n^2 hatjegyű, így

$$317 \leqq n \leqq 999.$$

Az n^2 utolsó két jegyéből alakított számot a-val jelölve, a feladat feltételei szerint

$$n^2 = 10\ 000(100-a) + 100a + a = 1\ 000\ 000 - 9899a.$$

Itt 9899 törzstényezős felbontása $19 \cdot 521$ s így az utolsó tagot fejezve ki a nyert egyenletből

$$19 \cdot 521a = 1\ 000\ 000 - n^2 = (1000+n)(1000-n). \tag{1}$$

Tudjuk, hogy egy szorzat csak úgy lehet osztható egy törzsszámmal, ha már valamelyik tényező is osztható a törzsszámmal. Ezt az 521-re alkalmazva az első tényezőre

$$1317 \leqq 1000 + n \leqq 1999,$$

s így csak akkor lehet 521-gyel osztható, ha $3 \cdot 521 = 1563$-mal egyenlő; a második tényező pedig csak úgy, ha 521-gyel egyenlő. Az első esetben

$$n = 563 \qquad\qquad n^2 = 316\ 969 \tag{2}$$

kielégíti a feladat feltételeit, a második esetben $a = 479$, $1000 + n = 1479 = 3 \cdot 17 \cdot 29$ nem osztható 19-cel, s így (1) nem teljesülhet. A feladatnak tehát egy megoldása van, a (2) alatti.

Megjegyzés: Néhányan a négyzetszám első két jegyéből álló b számból indultak ki. Az erre nyerhető $n^2 = 9899b + 10\ 100$ egyenletből legfeljebb akkor sikerül további következtetéseket levonni, ha észreveszi valaki, hogy 10 100 egy négyzetszám és egy 521-gyel osztható szám összegére bontható:

$$10\ 100 = 16 \cdot 521 + 42^2$$

s így

$$(n+42)(n-42) = 521(19b+16).$$

Ez az észrevétel azt mutatja, hogy néha még a jelölések szerencsés megválasztása is lényeges lehet egy feladat megoldásában.

Többen abból indultak ki, hogy mik fordulhatnak elő négyzetszám utolsó két jegyeként, de szintén nem jutottak eredményre. Kétségtelenül hosszadalmasabb ez az út a fenti megoldásnál, de járható, mint a következő megoldás mutatja:

II. megoldás: Egy szám négyzetének utolsó két jegye csak a szám utolsó két jegyétől függ, más szóval, ha két szám 100-zal osztható számban különbözik, akkor a négyzetük is, mert

$$(100a+b)^2 = 10\ 000a^2 + 200ab + b^2 = 100(100a + 2ab) + b^2.$$

Elég tehát a 0-tól 100-ig terjedő számok utolsó két jegyét vizsgálni. De már a 0-tól 50-ig tartó számok végződése is kiad minden végződést, 50-en fölül csak ismétlődnek sorra ugyanazok a végződések, mert

$$(50+a)^2 = 2500 + 100a + a^2 = 100(25+a) + a^2,$$

sőt már 50-ig is párosan fordulnak elő a végződések: a 25-re szimmetrikusan elhelyezkedő számok négyzetének utolsó két jegye megegyezik. Valóban egy x számmal a 25-re nézve szimmetrikusan az $50 - x$ szám helyezkedik el és

$$(50-a)^2 = 2500 - 100a + a^2 = 100(25-a) + a^2.$$

A négyzetszámok lehetséges végződéseit (utolsó két jegyét) tehát megkapjuk, ha 0-tól 25-ig nézzük meg a számok négyzetének utolsó két jegyét. Így a következő végződések adódnak:

00 01 04 09 16 21 24 25 29 36 41 44 49 56 61 64 69 76 81 84 89 96.

Ezek mindegyikéhez elkészíthetjük a feladatban leírt számot és négyzetgyök-vonással eldönthetjük, hogy az négyzetszám-e vagy sem. Valamivel azonban még megkönnyíthetjük a számolást: Egy páros szám négyzetének 2 páros hatványával, egy 3-mal osztható szám négyzetének 3 páros hatványával kell oszthatónak lennie. Ismeretes, hogy minden páratlan szám négyzete $8k+1$ alakú. Könnyen belátható, hogy 3-mal nem osztható szám négyzete mindig $3k+1$ alakú, tehát négyzetszám $3k+2$ alakú nem lehet és hasonló megszorításokat megállapíthatunk más prímszámokkal kapcsolatban is.

A felsorolt végződések elsője és utolsója elesik, mert azokhoz képezve a feladat kikötéseit teljesítő számot nem 6-jegyű számhoz jutunk. A 01-hez, 09-hez, 25-höz, 41-hez, 49-hez, 81-hez és 89-hez tartozó számok 8-cal osztva 5-öt adnak maradékul és így nem lehetnek négyzetszámok, a 24-hez és 56-hoz tartozó pedig azért nem, mert 8-cal osztható, de 16-tal nem. A 3-mal, illetőleg 9-cel való oszthatóságot nézve a 04-hez, a 16-hoz, 61-hez és a 76-hoz tartozó számok 3-mal osztva 2-t adnak maradékul, a 29-hez és a 64-hez tartozó szám pedig osztható 3-mal, de 9-cel nem, tehát ezek sem négyzetszámok. A maradó számok közül a 21-hez tartozó osztható 11-gyel, de 121-gyel nem, a 36-hoz tartozó pedig osztható 7-tel, de 49-cel nem. A maradó három számból (a 44-hez, 69-hez és 84-hez tartozóból) négyzetgyököt vonva ezúton is azt találjuk, hogy a 316 969 szám az egyetlen, amelyik megfelel a feladat feltételeinek.

2. feladat. *Egy turista csoport A-ból B-be autóbuszon akar eljutni, azonban csak egy olyan autóbusz áll rendelkezésére, amely egyszerre a társaságnak csak egynegyed részét képes felvenni, és nincs elég idő arra, hogy egymás után szállítsa el őket A-tól B-ig.*

Ezért a társaság egyszerre indul el, mégpedig egynegyed része autóbuszon, a többi gyalog. Az autóbusz az első csoportot valahol az út közbeeső pontján teszi le, majd visszafordul, felveszi a társaság második negyedét, de őket sem szállítja végig, hanem visszatér a harmadik csoportért, majd hasonló módon a negyedikért, amelyet végül B-ig szállít. A szállítást úgy bonyolítják le, hogy mind a négy csoport egyidejűleg érkezik B-be.

Feltéve, hogy mind az autóbusz, mind a gyalogosok sebessége állandó és az autóbusz sebessége a gyalogosok sebességének 7-szerese, a turisták útjuk hányadrészét teszik meg autóbuszon, ill. gyalog? Hányszor annyi időre lett volna szükség az út megtételéhez abban az esetben, ha az autóbusz mind a négy csoportot A-tól B-ig szállítja?

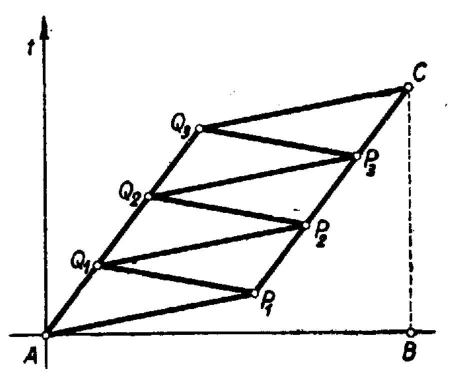
Megoldás: Mind a négy csoport egyszerre indul és egyszerre érkezik meg. Ez csak úgy lehet, ha mind a négy csoport ugyanakkora utat tesz meg autóbuszon és mind a négy csoport egyenlő hosszú szakaszon gyalogol.

Jelöljük egy csoport autóbuszon megtett útját l-lel. Ekkora gyalogló turisták $l/7$ hosszúságú utat tesznek meg, amíg az autóbusz az első csoportot leteszi, majd a gyalogosokkal való találkozásig a köztük levő $6l/7$ hosszú útból 7-szer annyit tesz meg a busz, mint a gyalogosok, vagyis ennek az útszakasznak hét nyolcad részét, $3l/4$ távolságot. A második csoport így $l/4$ utat tesz meg az autóbuszra szállásig, a harmadikra további $l/4$, a negyedikre pedig összesen $3l/4$ út megtétele után kerül sor, a csoportok tehát $3l/4$ utat tesznek meg gyalog és l utat autóbuszon, vagyis az egész út három hetedén gyalogolnak és négy hetedét teszik meg autóbuszon.

Az autóbusz a B-be érkezésig négyszer tett meg l hosszúságú utat B felé és háromszor $3l/4$ hosszúságú utat A felé, tehát összesen

$$4l + \frac{9l}{4} = \frac{25}{4}l$$

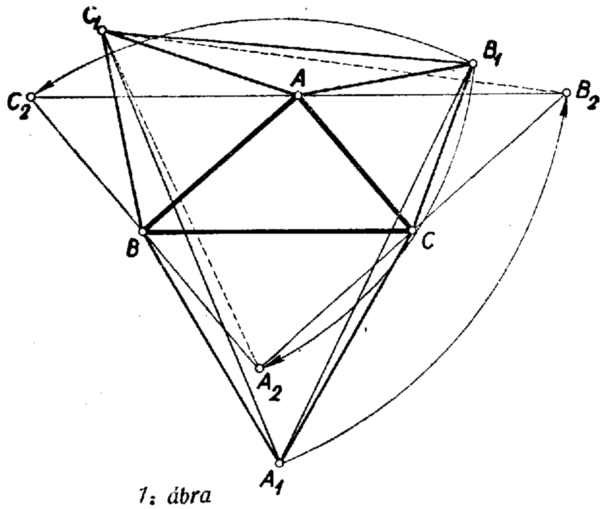
hosszúságú utat tett meg, míg ha mindenkit A-tól B-ig szállít, akkor négyszer B felé és háromszor vissza A-ba a teljes $7l/4$ hosszúságú utat, tehát összesen $49l/4$ hosszúságú utat kell megtennie. Ehhez $49/25$-ször, tehát majdnem kétszer annyi időre lenne szükség.



A túráról grafikont készítve – a vízszintes tengelyen az utat, a függőlegesen az időt tüntetve fel – az egymás utáni csoportok mozgását az AP_1C, AQ_1P_2C, AQ_2P_3C, AQ_3C vonalak ábrázolják, az autóbuszét pedig $AP_1Q_1P_2Q_2P_3Q_3C$.

3. feladat. *Adott az $A_1B_1C_1$ hegyesszögű háromszög. Szerkesztendő az ABC háromszög azzal a feltétellel, hogy az A_1 pont a BC oldal fölé kifelé rajzolt szabályos háromszög csúcspontja, hasonlóképpen a B_1 és C_1 pont a CA és AB oldal fölé kifelé rajzolt szabályos háromszög csúcspontja.*

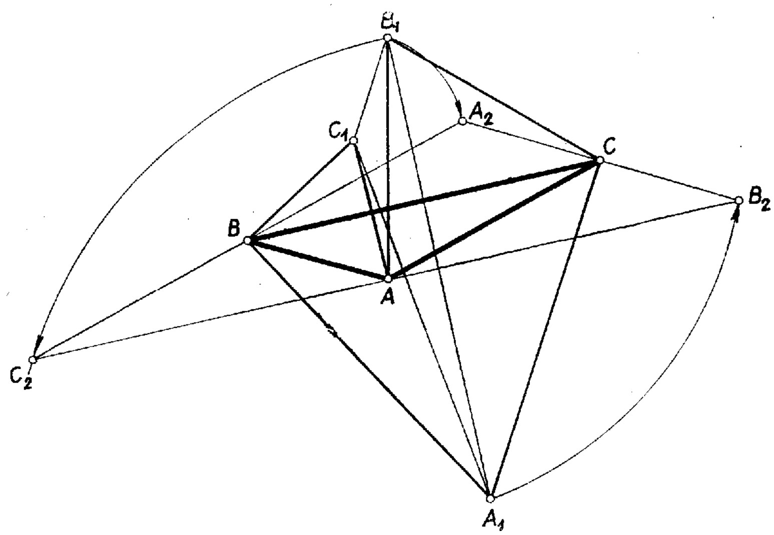
I. megoldás: Szerkesszük meg először valamely ABC háromszöghöz az $A_1B_1C_1$ háromszöget (1. ábra), majd az így nyert ábrát próbáljuk meg úgy kiegészíteni,hogy a szerkesztést visszafelé is elvégezhessük.



1. ábra

A szabályos háromszögek mindegyik szöge $60°$-os, ezért célszerűnek látszik $60°$-os elforgatásokat alkalmazni. Forgassuk pl. az ábra C_1BA_1 háromszögét a C_1 pont körül befelé (pozitív értelemben), ekkor a $60°$-os elforgatással a B pont az A pontba kerül, az A_1 pont elforgatott helyzetét jelöljük B_2-vel. Miután BA_1 szakasz $60°$-kal fordult el, párhuzamos helyzetbe került BC-vel, és tekintve, hogy egyenlő is vele, ezért a BCB_2A négyszög paralelogramma. Ha most a C_1AB_1 háromszöget forgatjuk el ugyancsak befelé (ezúttal negatív értelemben) a C_1 pont körül, a $BACA_2$ paralelogrammát nyerjük (A_2-vel B_1 pont elforgatott helyzetét jelöltük). Miután a két paralelogramma közös oldala AB, egy további közös csúcsuk C, így az A_2, B_2 és C pontok egy egyenesbe esnek és C az A_2B_2 szakasz felezőpontja. A_2 és B_2 az adatokból megszerkeszthető, tehát ezekkel együtt C pont is, végül ugyanezzel az eljárással, amivel C-t nyertük, megszerkeszthetjük A-t és B-t. A szerkesztéssel arra jutunk, hogy a keresett ABC háromszög csúcspontjai az $A_1B_1C_1$ háromszög oldalai fölé befelé rajzolt szabályos háromszögek harmadik csúcspontjai által alkotott $A_2B_2C_2$ háromszög oldalainak felező pontjai.

A szerkesztés szerint a kitűzött feladat látszólag minden esetben egyértelműen megoldható. Ennek ellentmond a 2. ábrán bemutatott helyzet, amellyel az $A_1B_1C_1$ háromszögből kiindulva kapunk ugyan ABC háromszöget, de A_1, B_1 és C_1 nem az oldalakra kifelé, hanem a befelé rajzolt szabályos háromszögek harmadik csúcspontja.



2. ábra

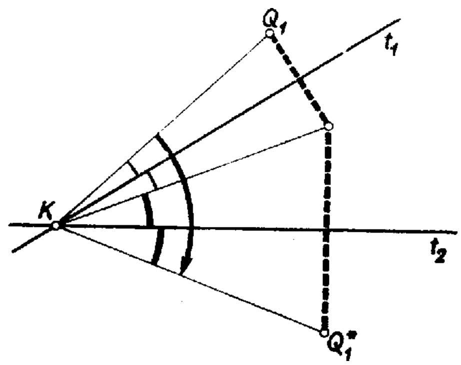
Ezen az ábrán azonban az $A_1B_1C_1$ háromszög nem hegyesszögű; vegyük észre továbbá azt is, hogy az $A_2B_2C_2$ háromszög körüljárási értelme ellentétes az $A_1B_1C_1$ háromszögével.

Bizonyítás nélkül megjegyezzük a következőket. A feladat megoldhatóságának az a feltétele, hogy az $A_1B_1C_1$ háromszög oldalai fölé befelé rajzolt szabályos háromszögek harmadik csúcsai által alkotott $A_2B_2C_2$ háromszög körüljárási értelme megegyezzék az $A_1B_1C_1$ háromszög körüljárási értelmével. (ABC körüljárási értelme mindig megegyezik $A_2B_2C_2$ körüljárási értelmével.) Az eredeti értelmezés szerint sohasem kapunk megoldást, ha az $A_1B_1C_1$ háromszögnek van $120°$-osnál nagyobb szöge, és a fennmaradó esetekben mindig kapunk megoldást, ha az $A_1B_1C_1$ háromszögnek nincs $30°$-osnál kisebb szöge.

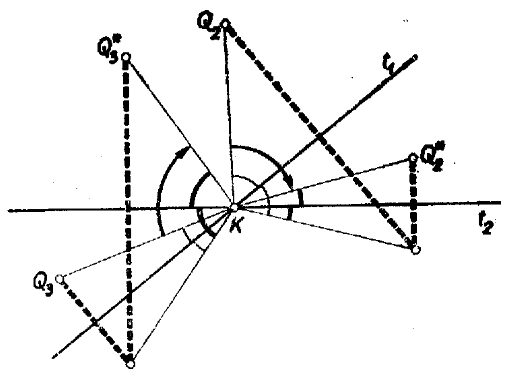
II. megoldás: A keresett háromszög C csúcsát pl. az jellemzi, hogy alkalmas irányban (C-től A felé) B_1 körül $60°$-kal elforgatva, majd C_1 körül ugyanilyen irányban $60°$-kal forgatva és végül A_1 körül ugyancsak $60°$-kal elforgatva visszakerül eredeti helyzetébe.

Megmutatjuk, hogy ha ugyanezeket a forgatásokat a sík egy tetszés szerinti P pontjára alkalmazzuk, akkor a pont a kiindulási helyzetéből a második forgatás utáni helyzetbe átvihető egy alkalmas pont körüli 120°-os forgatással, a harmadik forgatás utáni helyzetébe pedig egyetlen alkalmas 180°-os forgatással, ahol ezek a forgatások egy-egy csak az A_1, B_1 és C_1 pontoktól függő középpont körül történnek.

A bizonyításhoz azt fogjuk felhasználni, hogy egy K pont körül α szöggel történő elforgatás eredményét úgy is megkaphatjuk, ha húzunk a K ponton át tetszés szerint két egyenest, t_1-et és t_2-t úgy, hogy a t_1-től a t_2-ig a forgatás irányában $\alpha/2$ nagyságú szög legyen és minden pontot tükrözünk először t_1-re, azután t_2-re. Fordítva: két ilyen tükrözés eredménye egy K körüli α nagyságú elforgatással is megkapható (3–4. ábrák).

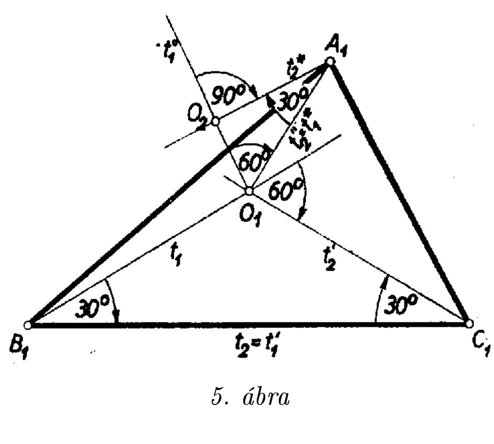


3. ábra



4. ábra

A B_1 körüli forgatást állítsuk elő úgy két tükrözés segítségével, hogy a második tükrözés t_2 tengelyéül a B_1C_1 egyenest választjuk, a C_1 körüli forgatást pedig úgy, hogy az első tükrözés t_1' tengelyéül választjuk B_1C_1-et (5. ábra).



5. ábra

Ekkor egy tetszés szerinti pont a kétszeri forgatás után ugyanoda kerül, mintha tükrözzük a pontot t_1-re, a kapott pontot $t_2(=B_1C_1)$-re, az így nyert pontot $t_1'(=B_1C_1)$-re, majd az újabb tükörképet t_2'-re. A B_1C_1 egyenesre történő kétszeri tükrözés azonban visszaviszi a pontot az e tükrözések előtti helyzetébe, s így az első két forgatás eredménye ugyanaz, mintha tükrözzük a sík pontjait t_1-re, majd t_2'-re. Ennek a két tükrözésnek pedig ugyanaz az eredménye, mintha a két egyenes O_1 metszéspontja körül végzünk $(t_1, t_2') = 60°$ kétszeresényi, azaz 120°-os elforgatást. Ezután még A_1 körül kell 60°-kal forgatni.

Ezeket a forgatásokat is állítsuk elő tükrözésekkel úgy, hogy két egymásutánt tükrözés tengelye O_1A_1 legyen. Ekkor az O_1-en átmenő első tükrözési tengelyhez t_1''-höz 60°-kal kell elforgatva lennie O_1A_1-nek, az A_1-en átmenő második tükrözés t_2^* tengelye pedig 30°-kal lesz elforgatva O_1A_1-hez képest. A négy egymásutáni tükrözés – és ezzel együtt a B_1, C_1, majd A_1 körüli 60°-os elforgatások – végeredménye ekkor ugyanaz, mintha tükrözünk a t_1'' egyenesre, azután t_2^*-ra. E két egyenes metszéspontját O_2-vel jelölve $A_1O_1O_2$ egy 30°, 60°, 90°-os szögekkel rendelkező háromszög, így a három forgatás egymásutáni elvégzésével minden pont ugyanoda kerül, mintha O_2 körül forgatnánk el 180°-kal, azaz tükröznénk az O_2 pontra.

Azt a C pontot kerestük, amely a tárgyalt 3 forgatás, vagy ami ugyanarra az eredményre vezet, az O_2-re történő tükrözés után eredeti helyére kerül vissza, ilyen pont pedig egyedül O_2. A fenti gondolatmenet szerkesztési eljárást is ad $C = O_2$ megszerkesztésére. Az ABC háromszög további csúcsai ugyanezen a módon szerkeszthetők, vagy megszerkeszthetjük C ismeretében a BCA_1 és CAB_1 egyenlőoldalú háromszögeket.