Kezdők (I. osztályosok) *versenye.*

1. feladat.

Megoldás: Jelöljük az első és második kétjegyű szám tizeseit a-val, az első szám egyeseit b-vel, a második szám egyeseit c-vel.

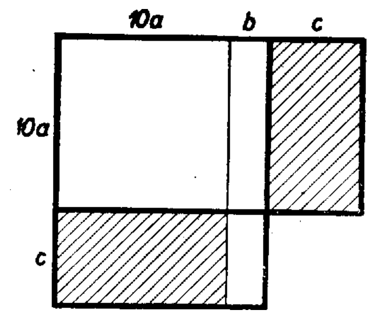
A fenti számítási mód akkor helyes, ha a

$$(10a + b)(10a + c) = 10a(10a + c + b) + bc$$

egyenlőség azonosság. Ez azonban igaz, mert mindkét oldal rendezett polinom alakja

$$100a^2 + 10ab + 10ac + bc.$$

Megjegyzések: 1. A $(10a + b)(10a + c)$ és a $10a(10a + c + b) + bc$ kifejezések egyenlőségét (tetszőleges nem negatív a, b, c esetén) szemléltetni is tudjuk.

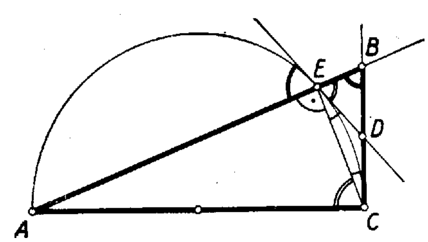


Az ábrán látható $10a + b$ és $10a + c$ oldalú téglalap területe az első kifejezést adja. A $10a$ és $10a + b + c$ oldalú téglalap területe az első téglalap területénél (a csíkozott téglalapok egybevágósága miatt) éppen egy b és c oldalú téglalap területével kevesebb.

2. A számolási eljárás változatlanul használható, ha két olyan egyenlő nagyságrendű *többjegyű* (esetleg tizedesjegyet is tartalmazó) számot szorzunk össze, amelynek első számjegye vagy jegyei egyenlők. Ha a két számnak ezt a közös részét jelöljük $10a$-val, a maradék részeket b-vel, illetve c-vel, a bizonyítás változatlan marad. – Ez a számolási mód többjegyű számoknál persze nem mindig jelent számítási könnyebbséget.

2. feladat.

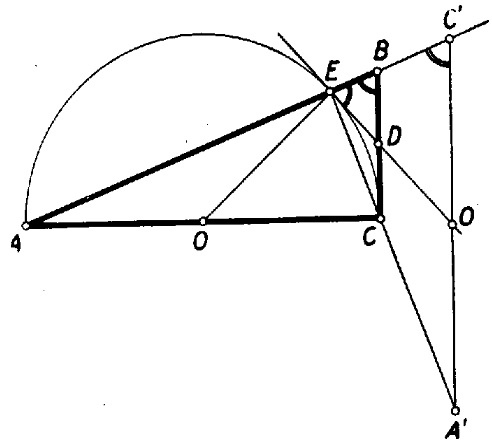
I. megoldás: A betűzést az 1. ábra mutatja.



1. ábra

Thales tétele miatt az $AEC\sphericalangle$ – és ezért mellékszöge, a $CEB\sphericalangle$ is – derékszög. A DE és DC szakaszok egyenlőek, mert D-ből a körhöz húzott érintőszakaszok; ezért az EDC háromszög egyenlő szárú, vagyis az EC alapon fekvő két (egy ívvel jelzett) szöge egyenlő. Ebből következik, hogy az EDB háromszög két (két ívvel jelzett) szöge egyenlő, mert mindegyik az előbbi két szög egyikét $90°$-ra egészíti ki. Mivel egyenlő szögekkel szemben egyenlő oldalak vannak egy háromszögben, az EDB háromszög egyenlő szárú.

II. megoldás: Forgassuk el az AEC derékszögű háromszöget az E csúcs körül $90°$-kal úgy, hogy az EC oldala az EB egyenesre kerüljön (2. ábra).



2. ábra

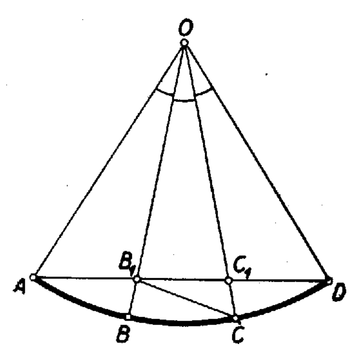
A háromszög EA oldala így EC-re kerül, a félkör O középpontjából kiinduló OE sugár pedig a rá merőleges ED érintőre. Így kapjuk az $A'EC'$ háromszöget. Mivel BC merőleges az AC befogóra, az ennek 90°-os elforgatásával keletkező $A'C'$-vel párhuzamos lesz. Az $EO'C'$ háromszög két oldala a félkör sugarával egyenlő, s így E-nél és C'-nél levő két szöge egyenlő. De CB és $A'C'$ párhuzamossága miatt ugyanekkora az EBD szög is. Az EBD háromszög E-nél és B-nél levő szögei tehát egyenlő nagyságúak, s így két oldala: ED és BD valóban egyenlő egymással.

III. megoldás: A DEB és DBE szögek egyenlőségét másképpen is beláthatjuk.

A $DEB\sphericalangle$ csúcsszöge (az AE húr és az E-ben húzott érintő szöge) a kör AE ívén nyugvó kerületi szög (1. ábra). A DBE szöggel egyenlő ACE szög (merőleges szárú hegyesszögek) szintén az AE íven nyugvó kerületi szög. Így az ezzel a két szöggel egyenlő DEB és DBE szögek is egyenlők egymással.

3. feladat.

I. megoldás: Jelöljük OB-nek, ill. OC-nek az AD-vel való metszéspontját B_1-gyel, ill. C_1-gyel (1. ábra).



1. ábra

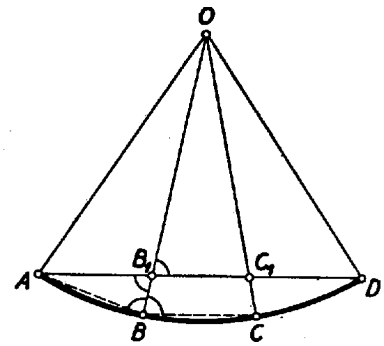
A körívet harmadoló pontokhoz húzott sugarak az O-nál levő középponti szöget is három egyenlő részre osztják. Húzzuk meg a CB_1 szakaszt. Az így keletkezett OCB_1 háromszög egybevágó az OAB_1, háromszöggel, mert annak OB-re vonatkozó tükörképe, ugyanis az OA és OC sugarak egyenlő szöget zárnak be OB-vel.

Ha megmutatjuk, hogy a B_1C_1C háromszögben a C_1-nél levő szög tompaszög, s így a háromszög legnagyobb szöge, ebből következni fog, hogy B_1C a háromszög leghosszabb oldala; ennek következtében B_1C_1 kisebb B_1C-nél, tehát az utóbbival egyenlő AB_1-nél is. A két sugár a húrt ezek alapján nem osztja egyenlő részekre.

A B_1C_1C szög azonban az egyenlő szárú OB_1C_1 háromszög két egyenlő szöge közül az egyiknek, tehát mindenképpen egy hegyesszögnek a kiegészítő szöge, s így valóban tompaszög. Ezzel, mint láttuk, a feladatot meg is oldottuk.

Szimmetria okokból világos, hogy a C_1D szakasz az AB_1-gyel egyenlő.

II. megoldás: Jelöljük ismét B_1-gyel és C_1-gyel az OB és OC körsugarak metszéspontját az AD húrral (2. ábra).



2. ábra

Az OB sugár az ABC szög szögfelezője, $ABB_1\sphericalangle = B_1BC\sphericalangle$. Az AOD szög szögfelezőjére a B_1 és C_1, valamint a B és C pontok tükrös helyzetűek, így B_1C_1 párhuzamos BC-vel, tehát $B_1BC\sphericalangle = OB_1C_1\sphericalangle$. Az utóbbi szög csúcsszöge: AB_1B szög eszerint az ABB_1 szöggel egyenlő. Az ABB_1 háromszög tehát egyenlő szárú, s ezért $AB_1 = AB$. Az AB mint ugyanakkora középponti szöghöz tartozó húr a BC húrral egyenlő. A BOC szög szárait metsző B_1C_1 és BC párhuzamos szakaszok közül a távolabbi BC a hosszabb. Így az utóbbival egyenlő AB_1 szakasz hosszabb, mint B_1C_1.

Megjegyzések: 1. Azok számára, akik már ismerik egy háromszög szögfelezőjének osztásarányára vonatkozó tételt (ált. gimn. II. oszt. tananyag), közöljük a feladatnak következő egyszerű megoldását.

Az OAC_1 háromszögnek az OB_1 szögfelezője. A szögfelezők osztásarányára vonatkozó tétel alapján

$$AB_1 : B_1C_1 = AO : C_1O.$$

Mivel C_1O feltétlenül kisebb, mint a kör sugara, ami AO-val egyező nagyságú, ezért AB_1 és B_1C_1 közül a B_1C_1 a kisebb.

2. Ha a bizonyítottakkal ellentétben az ívet harmadoló sugarak az ívhez tartozó húrt is harmadolnák, ez lehetőséget adna egy szög harmadolására körzővel és vonalzóval, ami pedig lehetetlen (l. pl. Középisk. Mat. Lapok XIV. köt. 4. és 5. sz. 97–107. és 129–134. o.). – Sok versenyző a szögharmadolás lehetetlenségére hivatkozva cáfolta meg a keletkező szakaszok egyenlőségét. Ez a megoldás természetesen jó, de a fenti bizonyításoknál összehasonlíthatatlanul nehezebben bizonyítható, mélyebben fekvő tételt használ fel egy ilyen egyszerű feladat megoldására.

Lukács Ottó, Scharnitzky Viktor

Haladók (II. osztályosok) *versenye.*

1. feladat.

I. megoldás: A feladat feltételei szerint a, b és c ugyan ismeretlenek, de fennállnak köztük bizonyos (ismertnek feltételezett) m és n értékkel az

$$a = \frac{b+c}{m}, \quad b = \frac{c+a}{n}$$

összefüggések, és meg kell határozni az $a+b$ arányát c-hez. E célból kíséreljük meg a-t és b-t kifejezni c-vel. Az egyenleteket így írhatjuk:

$$ma - b = c, \quad -a + nb = c. \tag{1}$$

Innen b-t, illetőleg a-t kiküszöbölhetjük, ha az első egyenlet n-szeresét a másodikhoz adjuk, illetőleg az első egyenletet a második m-szereséhez adjuk:

$$(mn-1)a = (n+1)c, \quad (mn-1)b = (m+1)c \tag{2}$$

e kettő összegéből, ha $mn \neq 1$, a keresett arány

$$\frac{a+b}{c} = \frac{m+n+2}{mn-1}.$$

Ha $mn = 1$, de m és n közül valamelyik nem -1, akkor a (2) egyenletekből következik, hogy $c = 0$, s így ez esetben a kérdésnek nincs értelme.

Ha végül $m = n = -1$, akkor mindkét (1) alatti egyenlet az

$$a + b + c = 0$$

egyenletbe megy át, és innen, ha $c \neq 0$,

$$\frac{a+b}{c} = -1$$

adódik.

Megjegyzés. A feladat megoldását az tette lehetővé, hogy az a, b, c ismeretlenekre csak két elsőfokú egyenlet áll fenn, és ezekben nem fordul elő az ismeretlent nem tartalmazó tag. – Az ilyen egyenleteket homogén elsőfokú egyenleteknek szokás nevezni. – Egy ilyen egyenletekből álló egyenletrendszernek mindig megoldása a csupa 0-ból álló értékrendszer. Ha van ettől különböző megoldás (és esetünkben van, mert kevesebb az egyenlet, mint az ismeretlenek száma), akkor az egyenletrendszer legfeljebb valamelyik ismeretlennek a többihez való arányait határozza meg (ezt sem föltétlenül egyértelműen). Esetünkben pl. lényegében az $\frac{a}{c}$ és $\frac{b}{c}$ arányokat határoztuk meg.

II. megoldás: Jelöljük a keresett arányt x-szel, akkor m, n és x között keresünk egy (a-tól, b-től és c-től független) összefüggést. Ha ez sikerül, abból x-et már kifejezhetjük. Az m, n és x-re fennáll

$$m=\frac{b+c}{a},\quad n=\frac{c+a}{b},\quad x=\frac{a+b}{c}. \tag{1}$$

Az egyenletek szimmetriáját a, b és c-ben még világosabbá tehetjük, ha mindegyik egyenlőséghez hozzáadunk 1-et:

$$m+1=\frac{a+b+c}{a},\quad n+1=\frac{a+b+c}{b},\quad x+1=\frac{a+b+c}{c}.$$

Innen, ha m, n és x egyike sem -1, akkor

$$\frac{1}{m+1}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{x+1}=\frac{a+b+c}{a+b+c}=1,$$

amiből x-re az

$$x=\frac{m+n+2}{mn-1}$$

érték adódik, ha $mn\neq 1$.

Ha $mn=1$, akkor az (1) alatti első két egyenlet szorzatából

$$1=\frac{ab+c(a+b)+c^2}{ab}=1+\frac{c(a+b+c)}{ab}$$

Innen, mivel feltettük, hogy a, b, c egyike sem 0, következik, hogy

$$a+b+c=0, \tag{2}$$

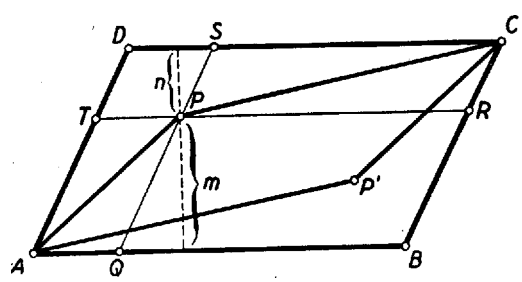
s így

$$m=n=x=-1.$$

Ugyancsak a (2) egyenlethez jutunk, ha m, n és x közül csak egyről tesszük fel, hogy értéke -1.

2. feladat.

I. megoldás: A megoldók egy része számítással igazolta az állítás helyességét. Bemutatunk egy ilyen megoldást. Legyen a P pont távolsága az AB és CD oldaltól m, ill. n (1. ábra).



1. ábra

Az $APCP'$ paralelogramma t területét megkapjuk, ha az $ABCD$ paralelogramma területéből elhagyjuk az $ABCP'$ és $APCD$ négyszögek területét.

Az utóbbi két terület egyenlő, mert az idomok egymás tükörképei az $ABCD$ paralelogramma középpontjára nézve, így elegendő pl. az $APCD$ négyszög területének kétszeresét vonni le. Ezt a négyszöget az APT és PCS háromszögekre, továbbá a $PSDT$ paralelogrammára bontva, azt kapjuk, hogy

$$t=AB\cdot(m+n)-AQ\cdot m-QB\cdot n-2AQ\cdot n=(AQ+QB)(m+n)-$$
$$-AQ\cdot m-QB\cdot n-2AQ\cdot n=QB\cdot m-AQ\cdot n.$$

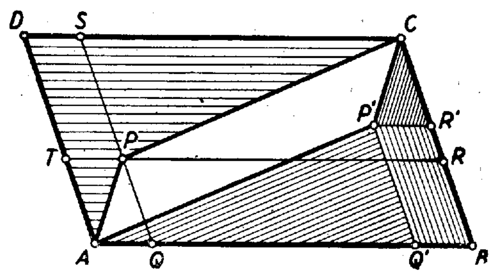
Itt a kisebbítendő a $PRBQ$ paralelogramma területét, a kivonandó pedig a $PSDT$ paralelogrammáét adja. Ezzel igazoltuk a feladat állítását.

Megjegyzés. Az ábrán P az ACD háromszögben van. Ez esetben az $APCD$ négyszög konkáv. Ha az ABC háromszögben levő P pontból indulunk ki, akkor számításunk negatív jellel adja a kiszámítandó paralelogramma területét, annak megfelelően, hogy az említett négyszög ez esetben konvex, és tükörképével együtt kétszeresen fedi az $APCP'$ paralelogrammát.

Számítás nélkül, közvetlenül is belátható a feladatban szereplő területek egyenlősége. A következőkben erre mutatunk két utat.

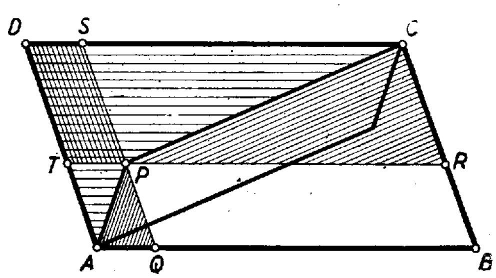
II. megoldás: Húzzunk P' ponton át AB-vel és BC-vel párhuzamos egyenest, és messék ezek BC-t, ill. AB-t az R' és Q' pontban.

Az $APCP'$ paralelogrammát körülzáró két konkáv négyszög egyikét, pl. az $AP'CB$ négyszöget vágjuk szét az $AP'Q'$ és $P'CR'$ háromszögre, valamint a $P'R'BQ'$ paralelogrammára (2. ábra).



2. ábra

Fedjük le az $AP'Q'$ háromszöggel a PCR háromszöget. ($AP'Q'\triangle = PCR\triangle$, mert $AP' = PC$ és a két háromszög szögei egyenlők.) Továbbá a $P'CR'$ háromszöggel lefedjük APQ háromszöget, a $P'R'BQ'$ paralelogrammával pedig a $PTDS$ paralelogrammát (3. ábra).

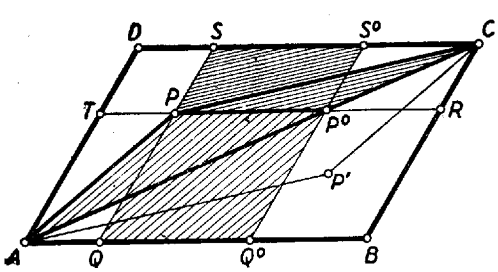


3. ábra

Ezek után az $ABCD$ paralelogrammából a két konkáv négyszöggel lefedetlen marad a $PRBQ$ paralelogramma, kétszeresen fedett a $PSDT$ paralelogramma. Ezért

$$T_{APCP'} = T_{PRBQ} - T_{PSDT}$$

III. megoldás: Messe a TR egyenes az AC átlót a P° pontban. Húzzunk P° ponton át AD-vel párhuzamos egyenest, mely AB-t Q°-ban, CD-t pedig S°-ban metszi (4. ábra).



4. ábra

Kimutatjuk, hogy az $APCP'$ paralelogramma területe egyenlő a $QQ^\circ S^\circ S$ paralelogramma területével, és ugyanezzel egyenlő a $PQBR$ és $PSDT$ paralelogrammák területének különbsége is.

$PP^\circ C\triangle$ területe fele a $PP^\circ S^\circ S$ paralelogramma területének, mert PP° oldaluk és ehhez tartozó magasságuk megegyezik. Hasonló okból $PP^\circ A\triangle$ területe fele a $PP^\circ Q^\circ Q$ paralelogramma területének. Eszerint az $APCP'$ paralelogramma területe, mely az $APC\triangle$ területének kétszerese, valóban egyenlő a $QQ^\circ S^\circ S$ paralelogramma területével.

Ismeretes továbbá, hogy

$$T_{P^\circ S^\circ DT} = T_{P^\circ Q^\circ BR}.$$

De

$$T_{P^\circ S^\circ DT} = T_{PSDT} + T_{P^\circ S^\circ SP},$$

és

$$T_{P^\circ Q^\circ BR} = T_{PQBR} - T_{P^\circ PQQ^\circ}.$$

E három egyenlet alapján

$$T_{PQBR} - T_{PSDT} = T_{P^\circ S^\circ SP} + T_{P^\circ PQQ^\circ} = T_{QQ^\circ S^\circ S},$$

és ezzel állításunk második részét is bebizonyítottuk.

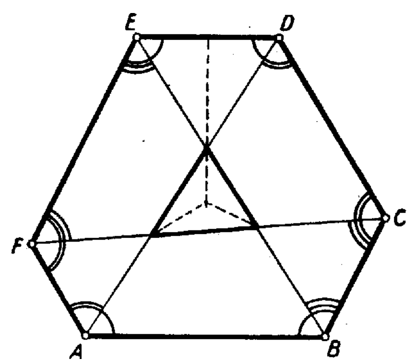
Ha (az ábrától eltérőleg) a P pont az $ABC\triangle$ belsejébe esik, akkor az előbbi gondolatmenettel arra jutunk, hogy

$$T_{APCP'} = T_{QQ^\circ S^\circ S} = T_{PSDT} - T_{PQBR}.$$

Megemlítjük, hogy egyes versenyzők a területeket szerkesztéssel négyzetekké alakították, és ezeket hasonlították össze. Területek szemlélettel, vagy méréssel történő összehasonlítása nem tekinthető bizonyító erejűnek!

3. feladat.

I. megoldás: Az $ABDE$ trapéz egyenlő szárú, mert átlói egyenlők. Tehát az egyíves szögek egyenlők. Hasonló ok miatt a kétíves szögek is egyenlők, éppígy a háromívesek is (1. ábra).



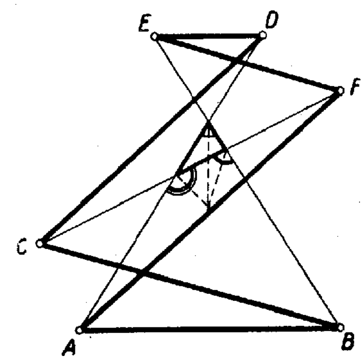
1. ábra

$CDEF$ négyszög húrnégyszög, mert a szemközti szögeinek összege egyenlő (mindkét szemközti szögpár egy egyíves, egy kétíves és egy háromíves szögből tevődik össze). Azonban e húrnégyszög körén van a B pont is, mivel $EBC\sphericalangle = EFC\sphericalangle$. Az A pont szintén ezen a körön van, mivel $FAD\sphericalangle = FCD\sphericalangle$.

Megjegyzés: Több versenyző állította, hogy az $ABDE$, $BCEF$ és $CDFA$ húrnégyszögek két-két csúcsa közös lévén, *ebből máris következik,* hogy a köré írt körük is egybeesik. Ez nem igaz.

II. megoldás: $ABDE$ egyenlőszárú trapéz, ezért a párhuzamos oldalak felező merőlegese közös, átmegy a két átló metszéspontján és egyenlő szöget zár be a két átlóval. Eszerint a hatszög szemközti oldalainak felező merőlegesei egyben az átlók alkotta háromszög szögfelezői, tehát egy pontban metszik egymást. Ez a pont egyenlő távolságra van a hatszög bármely négy szomszédos pontjától (mint a három felező merőleges metszéspontja), így tehát egyenlő távolságra van mind a hat csúcstól. Eszerint a hatszög köré kör írható, és a kör középpontja az egyenlő átlók alkotta háromszög szögfelezőinek metszéspontja.

Megjegyzés. 1. Tételünk hurkolt hatszögre is fennáll (2. ábra).



2. ábra

Hurkolt hatszög esetében a hatszög köré írható kör középpontja az egyenlő átlók alkotta háromszög két külső és egy belső szögfelezőjének metszéspontja (tehát a háromszög egyik hozzáírt körének középpontja).

Számos versenyző hibásan úgy vélte, hogy a feladat követelményeinek csak oly hatszög felelhet meg, amelynek átlói egy pontban metszik egymást, sőt egyesek szerint a hatszög csak szabályos lehet.