1. feladat. *Oldjuk meg a következő egyenletet:*

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x.$$

I. megoldás: Fejezzünk ki minden szögfüggvényt x szögfüggvényeivel:

$$\begin{gathered}\sin x + \sin 2x = \sin x + 2\sin x\cos x = \sin x(1+2\cos x),\\ \sin 3x = \sin x\cos 2x + \cos x\sin 2x = \sin x(2\cos^2 x - 1) + 2\sin x\cos^2 x = \\ = \sin x(4\cos^2 x - 1) = \sin x(2\cos x - 1)(2\cos x + 1),\\ 1 + \cos x + \cos 2x = 1 + \cos x + 2\cos^2 x - 1 = \cos x(1 + 2\cos x).\end{gathered}$$

Mind a három kifejezésben szerepel az $1+2\cos x$ tényező. A két oldal különbségét képezve és ezt a tényezőt kiemelve

$$\begin{gathered}(1+2\cos x)\big[\sin x + \sin x(2\cos x - 1) - \cos x\big] = \\ = (1+2\cos x)(2\sin x\cos x - \cos x) = (1+2\cos x)(2\sin x - 1)\cos x.\end{gathered}$$

Ez a kifejezés úgy lehet 0, ha $\cos x = -\dfrac{1}{2}$, vagy $\sin x = \dfrac{1}{2}$ vagy $\cos x = 0$, tehát a következő szögekre:

$$\begin{array}{lll} x = 120^\circ \pm k\cdot 360^\circ, & x = 240^\circ \pm k\cdot 360^\circ, & \\ x = 30^\circ \pm k\cdot 360^\circ, & x = 150^\circ \pm k\cdot 360^\circ, & k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \\ x = 90^\circ \pm k\cdot 360^\circ, & x = 270^\circ \pm k\cdot 360^\circ. & \end{array}$$

Megjegyzés: Igyekeztünk a föntiekben a legismertebb átalakításokkal érni célhoz, azonban sok más módon is átalakíthatjuk az egyenletet. Ha felhasználjuk pl. a bal oldalon a

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

összefüggést,[1] akkor a

$$\sin x + \sin 3x = 2\sin 2x\cos x$$

átalakítás után gyorsabban adódik az $1 + 2\cos x$ tényező kiemelhető volta és az egyenlet további átalakítása.

II. megoldás: Vizsgáljuk általánosabban tetszőleges n természetes számra a $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \ldots + \sin nx = 1 + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos(n-1)x$ egyenletet. Ismeretes, hogy a bal oldal is, a jobb oldal is zárt alakra hozható, pl. úgy, hogy megszorozzuk $2\sin\dfrac{x}{2}$-vel. Felhasználva a könnyen igazolható

$$2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta) \tag{1}$$

és

$$2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha+\beta) - \sin(\beta-\alpha) \tag{2}$$

azonosságokat, azt kapjuk, hogy

$$\begin{gathered}2\sin\frac{x}{2}(\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \ldots + \sin nx) = 2\sin\frac{x}{2}\sin x + \\ +2\sin\frac{x}{2}\sin 2x + 2\sin\frac{x}{2}\sin 3x + \ldots + 2\sin\frac{x}{2}\sin nx = \cos\frac{x}{2} - \cos\frac{3}{2} + \\ + \cos\frac{3}{2}x - \cos\frac{5}{2}x + \cos\frac{5}{2}x - \cos\frac{7}{2}x + \ldots + \cos\frac{2n-1}{2}x - \\ - \cos\frac{2n+1}{2}x = \cos\frac{x}{2} - \cos\frac{2n+1}{2}x;\end{gathered}$$

másrészt

$$\begin{gathered}2\sin\frac{x}{2}\big[1 + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos(n-1)x\big] = 2\sin\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\cos x + \\ +2\sin\frac{x}{2}\cos 2x + \ldots + 2\sin\frac{x}{2}\cos(n-1)x = 2\sin\frac{x}{2} + \sin\frac{3}{2}x - \sin\frac{x}{2} + \\ + \sin\frac{5}{2}x - \sin\frac{3}{2}x + \ldots + \sin\frac{2n-1}{2}x - \sin\frac{2n-3}{2}x = \sin\frac{x}{2} + \sin\frac{2n-1}{2}x.\end{gathered}$$

[1] Ez könnyen igazolható, ha a bal oldalon α-t és β-t a jobb oldalon szereplő szögek összege, illetőleg különbségeként írjuk.

A kapott kifejezések ugyancsak az (1), ill. (2) azonosságok segítségével – azokat ellenkező irányban alkalmazva – szorzattá alakíthatók, ha (1)-ben α-t és β-t úgy választjuk, hogy $\alpha-\beta=\frac{x}{2}$, $\alpha+\beta=\frac{2n+1}{2}x$ legyen, illetőleg (2)-ben úgy, hogy $\alpha+\beta=\frac{2n-1}{2}x$, $\alpha-\beta=\frac{x}{2}$ legyen.

Az első esetben $\alpha=\frac{n+1}{2}x$, $\beta=\frac{n}{2}x$ és így

$$\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{2n+1}{2}x=2\sin\frac{n+1}{2}x\sin\frac{n}{2}x;$$

a második esetben $\alpha=\frac{n}{2}x$, $\beta=\frac{n-1}{2}x$, és így

$$\sin\frac{x}{2}+\sin\frac{2n-1}{2}x=2\sin\frac{n}{2}x\cos\frac{n-1}{2}x.$$

Egyenletünket tehát, ha még 2-vel osztunk, a következő alakra hoztuk:

$$\sin\frac{n+1}{2}x\sin\frac{n}{2}x=\sin\frac{n}{2}x\cos\frac{n-1}{2}x.$$

Mivel átalakítás közben szoroztunk $\sin\frac{x}{2}$-vel, ennek a gyökeit, tehát az $x=k\cdot 360^\circ (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots)$ szögeket külön meg kell vizsgálnunk. Ezekre az eredeti egyenlet bal oldalán 0 áll, a jobb oldalon viszont n darab 1-es összege, ezek tehát az eredeti egyenletnek nem gyökei, ezeket a továbbiakban kizárjuk.

Redukáljuk a nyert egyenletet 0-ra, és igyekezzünk szorzattá alakítani a két oldal különbségét:

$$\begin{gathered}0=\sin\frac{n}{2}x\left(\sin\frac{n+1}{2}x-\cos\frac{n-1}{2}x\right)=\sin\frac{n}{2}x\left(\sin\frac{n}{2}x\cos\frac{x}{2}+\right.\\ \left.+\cos\frac{n}{2}x\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{n}{2}x\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{n}{2}x\sin\frac{x}{2}\right)=\\ =\sin\frac{n}{2}x\left\{\sin\frac{n}{2}x\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)+\cos\frac{n}{2}x\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)\right\}=\\ =\sin\frac{n}{2}x\left(\sin\frac{n}{2}x-\cos\frac{n}{2}x\right)\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right).\end{gathered}$$

Itt az első tényező 0-helyei azok a szögek, amelyekre

$$\frac{n}{2}x=k\cdot 180^\circ,\quad \text{azaz}\quad x=\frac{k\cdot 360^\circ}{n},\quad k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots;$$

a második, illetőleg harmadik tényező akkor tűnik el, ha

$$\frac{n}{2}x=45^\circ+k\cdot 180^\circ,\ \text{ill.}\ \frac{x}{2}=45^\circ+k\cdot 180^\circ,$$

tehát az

$$x=\frac{90^\circ}{n}+\frac{k\cdot 360^\circ}{n},\quad \text{ill.}\quad x=90^\circ+k\cdot 360^\circ\quad (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots)$$

szögekre. A lényegesen különböző szögeket különválasztva és az első csoportból a föntebb kizárt $k\cdot 360^\circ$ alakú szögeket elhagyva azt kapjuk, hogy az egyenlet

$$\left.\begin{array}{ll} x=r\dfrac{360^\circ}{n}+k\cdot 360^\circ, & r=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1\\ x=\dfrac{90^\circ}{n}+s\dfrac{360^\circ}{n}+k\cdot 360^\circ, & s=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1\\ x=90^\circ+k\cdot 360^\circ & \end{array}\right\}k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$$

A kitűzött feladatot jelentő $n=3$ esetben a 120° és 240° (és az ezektől nem lényegesen különböző szögek) a gyökök első csoportjából adódnak, 30° és 150° a második csoportból $s=0,\ 1$ esetén, 90° az utolsó gyök, míg 270° ismét a gyökök második csoportjából adódik $s=2$ esetén.

Megjegyzések: A II. megoldásban tárgyalt általánosítást egy versenyző, Németh József felvetette és megoldotta.

A 90° felléphet a gyökök első csoportjában is $\left(\text{akkor, ha } n \text{ osztható 4-gyel és } r=\frac{n}{4}\right)$, továbbá a gyökök második csoportjában $\left(\text{ha } n\ 4l+1 \text{ alakú és } s=l=\frac{n-1}{4}\right)$. Ezekben az esetekben 90° az egyenletnek kétszeres gyöke.

2. feladat. *Legyen a és b egész szám. Bizonyítandó, hogy*

$$x^2 + ax + b$$

csak akkor állíthat elő végtelen sok egész x-értékre négyzetszámot, ha a kifejezés egy elsőfokú polinom négyzete.

I. megoldás: Azt kell vizsgálnunk, mikor állhat fenn egész x, y értékekre

$$x^2 + ax + b = y^2.$$

Innen x-et meghatározva

$$x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b + 4y^2}}{2}, \tag{1}$$

és ez csak úgy adhat egész értéket, ha a négyzetgyökjel alatt teljes négyzet áll:

$$a^2 - 4b + 4y^2 = z^2$$

Innen

$$z^2 - 4y^2 = (z + 2y)(z - 2y) = a^2 - 4b.$$

A jobb oldalon állandó érték áll; így ha y is, z is természetes szám, akkor ez az egyenlőség csak olyan értékekre állhat fenn, amelyekre $2y + z$ nem nagyobb ennél az állandó értéknél. Ilyen y, z számpár csak véges sok van. Minden y értékhez (1) szerint legfeljebb két x érték tartozik, tehát csak véges sok olyan egész x érték lehet, amelyre $x^2 + ax + b$ négyzetszám, ha $a^2 - 4b \neq 0$.

Ha viszont $a^2 - 4b = 0$, akkor

$$x^2 + ax + b = x^2 + ax + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2,$$

tehát a kifejezés egy elsőfokú polinom négyzete. Ezzel igazoltuk a feladat állítását.

Megjegyzés: A tárgyalt második esetben $b = \dfrac{a^2}{4}$ csak úgy lehet egész szám, ha a páros. Ebben az esetben az adott másodfokú kifejezés egy egész együtthatós elsőfokú polinom négyzete, s így *minden* egész x értékre négyzetszámot állít elő.

II. megoldás: Kényelmesebb lesz az adott kifejezés négyszeresét vizsgálni. Ez is négyzetszámot állít elő, ha az adott polinom értéke négyzetszám, de fordítva is: a polinom egész helyen mindig egész számot állít elő, s így a négyszerese mindig páros számot. Ha ez a néggyel szorzott érték négyzetszám, akkor páros szám négyzetének kell lennie, s így a negyedrésze, vagyis az eredeti polinom értéke is egész szám négyzete. Elegendő tehát a polinom négyszeresét vizsgálni:

$$4x^2 + 4ax + 4b = (2x + a)^2 + 4b - a^2.$$

Ha ez egy y egész szám négyzete, akkor

$$4b - a^2 = y^2 - (2x + a)^2 = (y + 2x + a)(y - 2x - a).$$

Azonban egy egész szám a 0 kivételével csak véges sok féleképpen bontható két egész szám szorzatára, egy-egy felbontás pedig már egyértelműen meghatározza x-et és y-t.

Így az adott kifejezés csak akkor vehet fel végtelen sok egész x értékre négyzetszámot, ha $4b - a^2 = 0$, ekkor

$$4x^2 + 4ax + 4b = (2x = a)^2$$

és ennek negyedrésze ugyancsak egy elsőfokú polinom négyzete. Ezzel igazoltuk a feladat állítását.

Megjegyzés: Mint láttuk, ha végtelen sok helyen állít elő a polinom négyzetszámot, akkor minden egész x-re négyzetszám az értéke, tehát eredményünk így fogalmazható: ha egy a feladatban adott alakú polinom értéke minden egész x-re négyzetszám, akkor a polinom egy polinom négyzete. Ez az állítás már sokkal általánosabban igaz, nemcsak a legmagasabb fokú tagnak adhatunk együtthatót, hanem a fokszámra sem kell kikötést tennünk. Érvényes a következő tétel: Ha egy egész együtthatós polinom értéke minden egész helyen négyzetszám, akkor a polinom egy polinom négyzete. A tétel négyzet helyett tetszés szerinti egész k-val k-adik hatványokra is igaz.

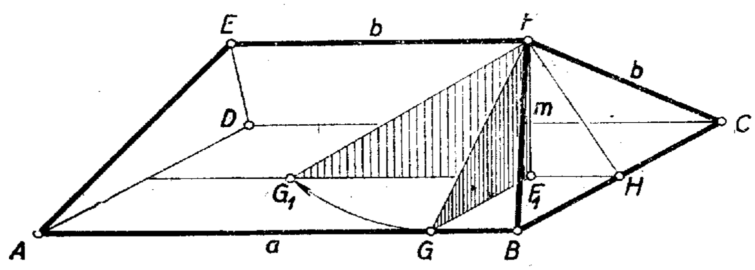
Az viszont lényeges, hogy ne csak végtelen sok egész helyre tegyünk feltételt, mert amint a legmagasabb együtthatóról nem kötjük ki, hogy 1 legyen, akkor már van olyan másodfokú polinom is, amelyik nem teljes négyzet, és végtelen sok egész helyen vesz fel négyzetszámot értékül.

3. feladat. *Alkossunk 6 csúcsú, 5 lapú poliédert a következő feltételekkel:*

a) *a poliéder egyik lapja a oldalú négyzet;*

b) *a poliéder összes többi éle egyenlő egymással;*
c) *a négyzet két szomszédos oldalához csatlakozó két lapnak a négyzetlappal bezárt szöge egymást* 90°*-ra egészíti ki.* *Bizonyítsuk be, hogy a poliéder két lapjának az átlói a hosszúságúak.*

Megoldás: A leírt test négyzetlapja legyen $ABCD$. A testnek van egy ennek valamelyik oldalával, mondjuk AB-val párhuzamos EF éle, melynek merőleges vetülete a négyzet AB-vel párhuzamos középvonalára esik és azon szimmetrikusan helyezkedik el.



Legyen F merőleges vetülete a négyzetlapon, a négyzet AB, ill. BC oldalán rendre F_1, G és H, jelöljük a négyzet oldalaitól különböző egyenlő élek hosszát b-vel, az FF_1 távolságot m-mel. Az FF_1 szakasz merőleges F_1G-re és F_1H-ra is, így az FF_1G háromszöget beforgathatjuk körülötte az EFH síkba, ekkor G egy a HF_1 egyenesen fekvő G_1 pontba kerül. A *c)* feltétel szerint az FG_1H háromszög F-nél derékszögű, FF_1 pedig a háromszög magassága. Így a magasságra vonatkozó középarányossági tétel szerint, mivel $F_1G = a/2$ és $F_1H = (a-b)/2$,

$$m^2 = \frac{a}{2} \cdot \frac{a-b}{2}. \tag{1}$$

Számítsuk ki az $ABFE$ trapéz AF átlóját, mint a páronként merőleges AG, GF_1, F_1F szakaszokból alkotható téglatest testátlóját. Az EB átló és a $GDEF$ trapéz átlói szimmetria okokból ugyanekkorák. Felhasználva (1)-et is, azt kapjuk, hogy

$$AF^2 = AG^2 + GF_1^2 + F_1F^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + m^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + $$
$$+ \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a(a-b)}{4} = \frac{1}{4}(3a^2 + ab + b^2).$$

A feladat állításához azt kell tehát belátnunk, hogy $ab + b^2 = a^2$. Az a és b élhosszak közt tudunk egy összefüggést kapni, ha felírjuk Pythagoras tételét FB-re, mint annak a téglatestnek átlójára, melynek egyik lapja BGF_1H és egyik további csúcsa F. Felhasználva (1)-et is:

$$b^2 = FB^2 = BH^2 + HF_1^2 + F_1F^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + \frac{a(a-b)}{4} =$$

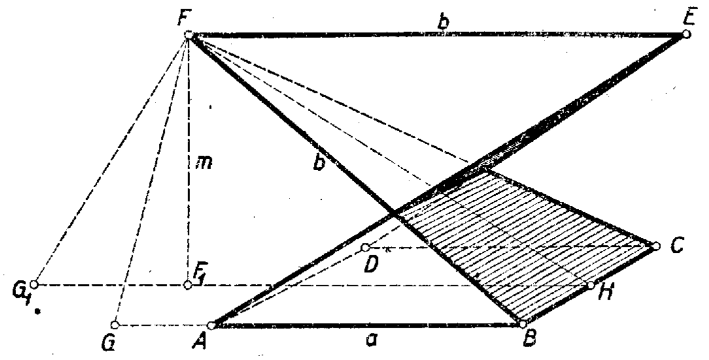
$$= \frac{1}{4}\left(3a^2 - 3ab + b^2\right).$$

A b-t tartalmazó tagokat a bal oldalra rendezve és 3-mal osztva innen valóban

$$ab + b^2 = a^2$$

adódik és ezzel igazoltuk a feladat állítását.

Megjegyzések: 1. Az utolsó egyenletből b-re két érték adódik: $a\left(\sqrt{5}-1\right)/2$ és $-a\left(\sqrt{5}+1\right)/2$. Mint egy versenyző, *Kalmár Ágota*, megjegyezte, a negatív gyöknek is lehet geometriai jelentést tulajdonítani. Ennek egy önmagát átmetsző test felel meg: a két háromszöglap áthatol egymáson, a másik két oldallap pedig hurkolt trapéz lesz $a\left(\sqrt{5}+1\right)/2$ oldalhosszúsággal.



Ugyanekkora az alaplappal párhuzamos él is, míg a trapézok átlói (amelyek most a hurkolt trapézon kívül húzódnak) a hosszúságúak.

2. Helyezzük a feladatban szereplő testet egy kocka fölső vízszintes $ABCD$ lapjára (EF legyen AB-vel párhuzamos), majd az $ABRS$-re is helyezzük el a test egy példányát úgy, hogy az EF-nek megfelelő él AS-sel legyen párhuzamos. Ekkor az AB-hez csatlakozó háromszög és trapéz lap a lapszögekre tett kikötés szerint egy síkba esik és egy egyenlő oldalú ötszöget alkot, amely az EF felezőmerőlegesére szimmetrikus. A többi kockalapokra is elhelyezhetjük a test egy-egy példányát úgy, hogy egy 12 egybevágó, egyenlő oldalú ötszög határolta poliédert kapjunk. Belátható (erre még visszatérünk), hogy a kapott test egy szabályos dodekaéder.