A verseny első fordulója ez évben – mint tavaly is – március 20-án folyt le az egyes iskolákban, és azon a gimnáziumok és ipari technikumok III. és IV. osztályú tanulói vehettek részt, az előző évi versennyel azonos feltételek mellett. A dolgozat elkészítésére 5 óra állott rendelkezésre. Beadtak 252 iskolában 1951 dolgozatot. Tavaly 229 iskolában 3104 dolgozatot adtak be, tehát ez évben több iskola vett részt a versenyben, de a beadott dolgozatok száma csökkent. Az iskolák számának emelkedését a gimnáziumok számának növekedése okozta, 209-re nőtt számuk, szemben a tavalyi 179-cel. A technikumok száma csökkent: 45-ről 43-ra. A versenyzők számának csökkenését a versenyre bocsátás mértékének szigorítása okozta.

A központi versenybizottság április 22-i javaslata alapján 142 iskola 323 tanulója – a dolgozat-beadók 16,6%-a – került a II. döntő fordulóba (tavaly 10,4%).

Részletes adatokat iskolafajok, megyék és városok szerint a táblázat közöl.

Kimulatás az 1958. évi Országos Matematikai Verseny I. fordulójáról

Megyék és városok	Beadott dolgozatok						Döntőbe került					
	gimnázium		ip.technikum		összesen		gimnázium		ip.technikum		összesen	
	iskola	tanuló	iskola	tanuló	iskola	tanuló	iskola	tanuló	iskola	tanuló	iskola	tanuló
1. Baranya	4	19	–	–	4	19	4	5	–	–	4	5
I. Pécs	4	30	2	22	6	52	1	1	2	5	3	6
2. Bács-Kiskun	11	71	1	4	12	75	6	10	1	2	7	12
3. Békés	10	84	1	12	11	96	4	8	–	–	4	8
4. Borsod	6	66	–	–	6	66	3	5	–	–	3	5
II. Miskolc város	4	43	4	48	8	91	2	6	2	3	4	9
5. Csongrád	6	30	–	–	6	30	3	9	–	–	3	9
III. Szeged város	3	31	3	17	6	48	4	9	–	–	4	9
6. Fejér	6	46	1	14	7	60	2	3	–	–	2	3
7. Győr-Sopron	11	85	3	18	14	103	5	10	–	–	5	10
8. Hajdú-Bihar	5	26	–	–	5	26	2	2	–	–	2	2
IV. Debrecen	6	38	3	4	9	42	4	8	1	1	5	9
9. Heves	4	47	–	–	4	47	4	11	1	1	5	12
10. Komárom	6	36	1	1	7	37	3	5	–	–	3	5
11. Nógrád	2	8	1	4	3	12	1	2	1	1	2	3
12. Pest	12	59	–	–	12	59	11	20	–	–	11	20
13. Somogy	5	45	1	3	6	48	4	8	–	–	4	8
14. Szabolcs	11	57	–	–	11	57	6	6	–	–	6	6
15. Szolnok	13	101	1	8	14	109	8	10	–	–	8	10
16. Tolna	8	52	–	–	8	52	9	14	–	–	9	14
17. Vas	9	46	–	–	9	46	4	4	–	–	4	4
18. Veszprém	9	89	1	10	10	99	7	17	–	–	7	17
19. Zala	2	20	1	11	3	31	–	–	1	1	1	1
Vidék	157	1129	24	176	181	1305	97	173	9	14	106	187
V. Budapest*	49	463	19	183	68	646	41	114	12	22	53	136
Összesen	206	1592	43	359	249	1951	138	287	21	36	159	323

*A gimnáziumokhoz sorolva 1 katonai középiskola 12 versenyzővel, akik közül 3 bekerült a döntőbe.

A döntőbe került 323 tanuló közül 189 (58,5%) lapunk feladatmegoldója (tavaly 58,3%).

A tavalyi versenyen helyezést nyert 29 III. osztályos tanuló közül 23 bekerült a döntőbe, a múlt évi Arany Dániel versenyen helyezést elért 32 II. osztályú tanuló közül 24 az idén is a döntőbe jutott.

Alább közöljük az I. fordulón kitűzött 3 feladatot megoldásokkal és megjegyzésekkel.

1. feladat. *Legyen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ a_{n+1} különböző elemekből álló számtani sorozat. Írjuk egyszerű alakban az*

$$S_n = x^{a_2^2-a_1^2} + x^{a_3^2-a_2^2} + \ldots + x^{a_{n+1}^2-a_n^2}$$

összeget, ha $x \neq 1$.

Megoldás: Az $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ számtani sorozat különbségét d-vel jelölve, a kitevőket átalakítjuk:

$$a_2^2 - a_1^2 = (a_2 - a_1)(a_2 + a_1) = d(a_2 + a_1) = d(2a_1 + d) = 2a_1d + d^2,$$

hasonlóan:

$$a_3^2 - a_2^2 = 2a_1d + 3d^2,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$a_{n+1}^2 - a_n^2 = 2a_1d + (2n-1)d^2,$$

úgy, hogy:

$$S_n = x^{2a_1d+d^2} + x^{2a_1d+3d^2} + \ldots + x^{2a_1d+(2n-1)d^2} =$$
$$= x^{2a_1d+d^2}\left(1 + x^{2d^2} + x^{4d^2} + \ldots + x^{(2n-2)d^2}\right).$$

A zárójelben olyan n tagú mértani sor áll, amelynek hányadosa x^{2d^2}. Mivel a feltétel szerint $x \neq 1$ és $d \neq 0$, azért a hányados nem 1, és így alkalmazhatjuk a mértani sor összegképletét, amely szerint:

$$S_n = x^{2a_1d+d^2} \cdot \frac{x^{2nd^2} - 1}{x^{2d^2} - 1}.$$

2. feladat. *Keressünk olyan pozitív egész számot, amelynek utolsó jegye 2, és ha ezt a jegyet a szám végéről elhagyva az elejére írjuk, akkor a szám kétszeresét kapjuk.*

I. megoldás: Ha a keresett szám utolsó jegye 2, akkor kétszerese csak 4-re végződhet. Ez lesz a keresett szám utolsó előtti jegye is. Ennek kétszerese 8, a szám kétszeresének lesz utolsó előtti jegye, így a keresett számnak végétől számított harmadik jegye is 8 kell hogy legyen. A szám kétszeresének végétől számított harmadik jegye 6, mivel 8 kétszerese 6-ra végződik. A keresett számnak tehát 6 lesz a végéről számítandó negyedik jegye. A számból így már megvan: $\ldots$ 6842. Ennek kétszeresét képezve a negyedik jegy egyúttal a keresett számból a 2 elhagyásával és elejére írásával keletkező számnak is hátulról számított negyedik jegye lesz. Ez a jegy 3, mivel a 6 kétszereséhez a $2 \cdot 8$-nak 1-es maradékát is hozzá kell számítanunk. Így haladhatunk tovább a keresett szám számjegyeinek megállapításában.

A feladatnak megfelelő legkisebb számot akkor kapjuk meg, amikor a kétszeres számban először jutunk 2-höz. Ezen az úton a

$$105\ 263\ 157\ 894\ 736\ 842 = A$$

számhoz jutunk, amire ismét alkalmazva az eljárást $2A$ első jegyéül 2 adódik. Ezt tekinthetjük az utolsó jegy előreírásából keletkezőnek, s így A megoldása a feladatnak, mégpedig a legkisebb megoldása.

Folytathatjuk azonban tovább is az eljárást az 1 elé írva egy 2 számjegyet; ez esetben újra az A jegyei ismétlődnének s így kapjuk egy további megoldásként az $A \cdot 10^{18} + A$ számot, és hasonlóan ismételhetjük A jegyeit periodikusan akárhányszor, mindig megoldást kapunk. Az eljárás, amivel ezeket a megoldásokat nyertük, mutatja, hogy csak ezek a megoldások lehetségesek. A feladat összes megoldásai tehát az

$$A \cdot 10^{18k} + A \cdot 10^{18(k-1)} + \ldots + A \cdot 10^{18} + A = A \cdot \frac{10^{18(k+1)} - 1}{10^{18} - 1}$$
$$(k = 0, 1, 2, \ldots)$$

számok.

Megjegyzések: 1. A számjegyei között már korábban is előfordult a 2 (A negyedik jegye), ott azonban nem állhattunk meg, mert a szám kétszerezésével akkor a 2 elé egy 1 kerül.

2. Kezdhettük volna a számjegyek megállapítását a szám elejéről is: kétszerezéssel a szám elejére 2 csak úgy kerülhet, ha első jegye 1, viszont 21 csak úgy, ha az után 05 következik stb.

3. Sok megoldó megelégedett A megadásával, és nem adta meg az összes megoldást.

II. megoldás: Nevezzük a 2 elhagyása után megmaradó számot x-nek, és legyen ez n-jegyű szám. Ekkora keresett szám így írható: $10x + 2$. Ha a 2-t az x szám elé írjuk, akkor az így kapott szám $2 \cdot 10^n + x$. A feltétel szerint tehát:

$$2(10x + 2) = 2 \cdot 10^n + x,$$

amiből:

$$x = 2 \cdot \frac{10^n - 2}{19}$$

és az eredeti szám:

$$10x + 2 = 20 \cdot \frac{10^n - 2}{19} + 2 = \frac{20 \cdot 10^n - 2}{19} = 10^n + \frac{10^n - 2}{19}. \tag{1}$$

Ezek akkor egész számok, ha $10^n - 2$ osztható 19-cel, vagyis ha 10^n osztva 19-cel maradékul 2-t ad. Ez azt jelenti, hogy ha elkezdve tizedes törtté alakítani az $\frac{1}{19}$ számot, az osztási maradékok közt előfordul a 2, akkor van a feladat feltételeinek megfelelő szám, egyébként nincs, ilyen számot úgy kapunk, hogy vesszük a 2 maradék föllépéséig nyert hányadost, tizedesvessző kitétele nélkül és ha az n-edik 0 „levétele" után lépett fel a 2 maradék, akkor az így kapott egész számhoz 10^n-t adunk hozzá.

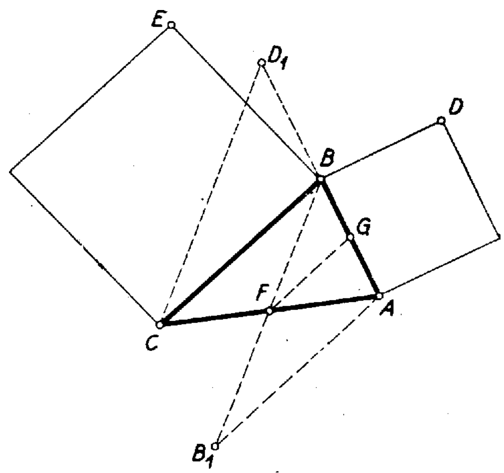
Az osztást elvégezve a 17-ik 0 levétele után lép fel először 2 maradékul és ekkor a hányados 5 263 157 894 736 842, tehát a keresett szám nyomán megfelel 105 263 157 894 736 842. Ha az osztásban nem állunk meg a „2" maradéknál, akkor a hányados következő jegyéül 1-et és maradékul is 1-et kapunk, tehát innen ismétlődnek az eddig nyert maradékok és a hányadosban az eddig nyert jegyek, leírva a következő 0 levételekor keletkező 0 jegyet is. Így bármeddig folytatva az osztást, az első „2"-től kezdve minden tizennyolcadik lépés újra „2" maradékhoz vezet. Ezek bármelyikénél megállhatunk.

Ezen az úton megkapjuk az előző megoldásban nyert összes számokat, amelyek megfelelnek a feladat követelményeinek.

Megjegyzés: Az $\frac{1}{19}$ tizedes törtté alakításának megfelelő osztás közben 1-től 18-ig minden szám előfordul maradékként, így a 19 tehát ún. főnix nevező[1]. Az azonban, hogy a feladat megoldható – azaz, hogy előfordult a maradékok között a 2, – ez nem azon múlik, hogy minden lehetséges maradék tényleg fellépett. Ha pl. azt követelnénk, hogy a szám az utolsó jegy előrehelyezésével 5-szörösére vagy 7-szeresére változzék, ebből arra a követelményre jutnánk, hogy az $\frac{1}{49}$ osztás közben az 5, ill. az $\frac{1}{69}$ osztás közben a 7 maradék fellépjen és mindkettő be is következik, bár sem a 49, sem a 69 nem főnix nevező (összetett szám nem is lehet az).

3. feladat. *Rajzoljunk egy háromszög oldalai fölé kifelé négyzeteket. Bizonyítsuk be, hogy a négyzeteknek a háromszögcsúcsoktól különböző csúcsai olyan hatszöget határoznak meg, amelynek minden második oldala a háromszög egy-egy súlyvonalának a kétszerese.*

I. megoldás: Legyenek a B-ből induló és AB-re, illetve BC-re merőleges négyzet oldalak BD és BE. Forgassuk el a BDE háromszöget B körül 90°-kal úgy, hogy E a C pontba kerüljön. Ekkor BD az AB oldal meghosszabbításába kerül és azzal egyenlő BD_1 szakaszt alkot.



1. ábra

Ennek folytán, ha meghúzzuk az ABC háromszög B-ből induló BF súlyvonalát, az egyben az ACD_1 háromszög középvonala is lesz, s így az ED-vel egyenlő CD_1 szakasz a BF súlyvonal kétszerese, a feladat állításának megfelelően. Hasonlóan járhatunk el a hatszög másik két szóbajövő oldalával is.

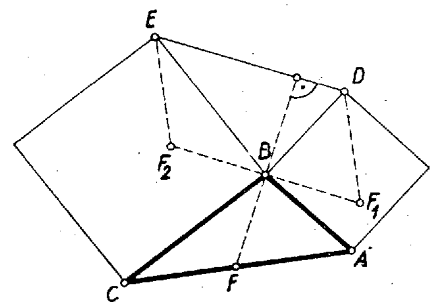
Megjegyzések: 1. Azt is tudjuk, hogy BF párhuzamos a CD_1 oldallal, s így ED, amiből CD_1 egy 90°-os elforgatással keletkezett, merőleges is a BF súlyvonalra.

[1] Az ilyen számokról bővebb felvilágosítást ad pl. a következő mű: Péter Rózsa: A számok világa. (Budapest, 1948. Új Nevelés Könyvtára, 144. o.)

Nem egy versenyző észrevette ezt a merőlegességet, de sajnos, fennállását a szemléletből, bizonyítás nélkül elfogadta, holott ez a tény semmivel sem magátólértetődőbb, mint aminek bizonyítását a feladat kívánja.

2. Számos megoldás a fentinek nem lényegesen különböző változata. Így egyesek a B pont F-re vonatkozó B_1 tükörképét véve a BDE és ABB_1 háromszögek egybevágóságát igazolták, vagy meghúzva a BC-vel párhuzamos FG középvonalat, a BFG és DEB háromszögek hasonlóságát bizonyították fentiekkel rokon gondolatok alapján.

II. megoldás: A D és E pontok jelentése legyen ugyanaz, mint az előző megoldásban, és a BDE háromszög B-ből induló magasságvonala messe AC-t F-ben.



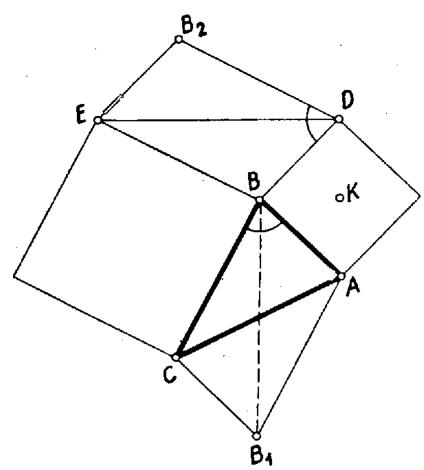
2. ábra

Forgassuk el az ABF és CBF háromszögeket B körül ellenkező irányban $90°$-kal úgy, hogy az A pont D-be, C pedig E-be kerüljön. A háromszögek új helyzete legyen DBF_1 és EBF_2.

Ekkor az elforgatás következtében a BF_1 és BF_2 szakaszok merőlegesek BF-re, s így egy egyenesbe esnek, amely párhuzamos ED-vel; másrészt DF_1 és EF_2 merőleges AC-re, tehát párhuzamos egymással.

Ezek szerint DEF_2F_1 paralelogramma. Ebből következik egyrészt, hogy DE egyenlő hosszú F_1F_2-vel, ami BF kétszerese; másrészt az AF-fel egyenlő hosszú DF_1 és a CF-fel egyenlő EF_2 egymással egyenlők, így tehát BF az ABC háromszög súlyvonala. Ezzel a feladat állítását igazoltuk.

III. megoldás: Jelölje D és E ugyanazokat a pontokat, mint az előző megoldásokban. Egészítsük ki az ABC és BDE háromszögeket az $ABCB_1$, ill. BDB_2E paralelogrammává.



3. ábra

Azt állítjuk, hogy ez a két paralelogramma egybevágó. Forgassuk ugyanis el az ábrát az AB fölötti négyzet K középpontja körül $90°$-kal úgy, hogy AB a BD oldalba menjen át. Ekkor az AB_1 oldal, amelyik párhuzamos és egyenlő BC-vel, az utóbbira merőleges BE négyzetoldalra kerül, tehát az $ABCB_1$ paralelogramma BDB_2E-t fogja fedni.

Az AC és DE oldalak ennek a paralelogrammának a két átlójával egyenlők s így a paralelogrammában felezik egymást. Ez azonban éppen azt jelenti, hogy a két háromszög bármelyikében a B-vel szemközti oldal a másik B-ből induló súlyvonalának a kétszerese és arra merőleges. Ezzel a feladat állítását (annál valamivel többet is) igazoltuk.

Megjegyzések: 1. Ebben a megoldásban világos az ABC és DBE háromszögek teljesen szimmetrikus szerepe, ami különben közvetlenül látszik abból, hogy az ábrán szereplő két négyzet keletkezhetett akár mint az egyik, akár mint a másik háromszög B-ből induló oldalaira kifelé rajzolt négyzet.

2. Ennek megfelelően az I. és II. megoldásban is felcserélhetnénk a két háromszög szerepét, ami annak felel meg, hogy ábráink alapján DE helyett AC-re is igazolhatnánk a feladatnak megfelelő állítást. Ez az I. megoldás esetén teljesen azonos módon történhetne, a II. megoldást annyiban kellene módosítani, hogy BF súlyvonal voltának bizonyítása helyett arra kellene hivatkoznunk, hogy a BDE háromszög B-ből kiinduló súlyvonala egyben a paralelogramma középvonala is, és így DF_1-gyel és EF_2-vel párhuzamos és egyenlő, a kettő együtt pedig kiadja AC-t.

3. A feladat állítása érvényben marad akkor is, ha nem kifelé, hanem „befelé” rajzolunk az ABC háromszög oldalai fölé négyzeteket. (A hatszög ebben az esetben hurkolt hatszög lesz.) Ez esetben a bizonyításainkban szereplő BDE háromszög helyébe mindössze annak a B pontra vonatkozó tükörképe lép.