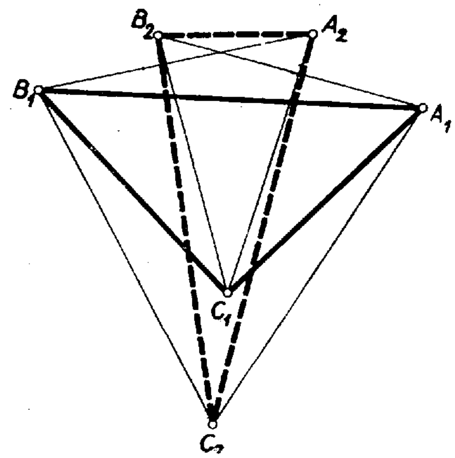
Az 1958. évi Arany Dániel haladók versenye döntőjének 3. feladatát és annak megoldását lapunk előző számában ismertettük. A versenyzőktől csak a szerkesztés végrehajtását kívántuk, ezért zártuk ki a háromszögek közül a tompaszögűeket. Mindamellett a közölt I. megoldás után rámutattunk arra a meglepő tényre, hogy bár a szerkesztés mindenkor egyértelműen elvégezhető, a kitűzött feladatnak mégis csak abban az esetben adja megoldását, ha az adott háromszög oldalai fölé befelé rajzolt szabályos háromszögek harmadik csúcsai az adott háromszöggel megegyező körüljárású háromszöget határoznak meg. Ebből az a tanulság, hogy valamely feladat megoldásainak megvizsgálásánál sohasem lehetünk eléggé körültekintők.

Az alábbiakban részletesebben foglalkozunk a feladat megoldhatóságának feltételével. Bemutatjuk, hogy a mélyebb diszkusszió milyen finom megfontolásokat igényel, és bár középiskolai matematikatudásunkkal elvégezhető, azonban újszerű, pontosabban szólva a középiskolában ritkábban használt módszerek alkalmazását kívánja.

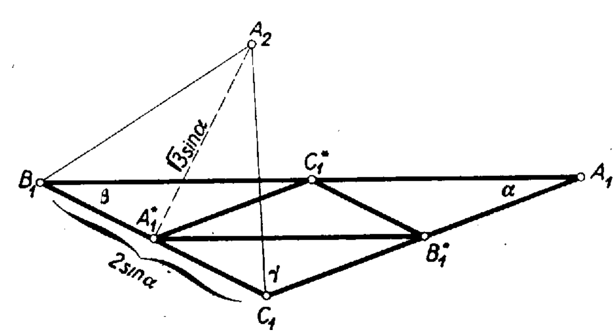
Vizsgáljuk meg elsőnek, *mi a feltétele annak, hogy egy adott $A_1B_1C_1$ háromszög oldalai fölé befelé rajzolt $A_1B_1C_2$, $B_1C_1A_2$ és $C_1A_1B_2$ szabályos háromszögekkel meghatározott $A_2B_2C_2$ háromszög körüljárási értelme megegyezzék az $A_1B_1C_1$ háromszög körüljárási értelmével* (1. ábra).



1. ábra

Mindenekelőtt megjegyezzük, hogy ez nyilván csak az $A_1B_1C_1$ háromszög szögeitől függ. Hiszen ha az $A_1B_1C_1$ háromszög helyett egy ahhoz hasonló $A_1^*B_1^*C_1^*$ háromszögből indulunk ki, akkor az ehhez tartozó „befelé rajzolt" $A_2^*B_2^*C_2^*$ háromszög szintén hasonló az $A_2B_2C_2$ háromszöghöz, és $A_2^*B_2^*C_2^*$ körüljárási értelme aszerint megegyező, ill. ellentétes az $A_2B_2C_2$ körüljárási értelmével, amint az $A_1^*B_1^*C_1^*$ és $A_1B_1C_1$ háromszögek körüljárási értelem tekintetében megegyeznek, ill. ellentétesek.

Átmenetileg mégis szükségünk lesz adott háromszögünk oldalainak mértékszámára is. Tudjuk, hogy ezek aránya megegyezik a szemközti szögek szinuszainak arányával, és az arányossági szorzó csak a hosszmértékegység megválasztásától függ. Válasszuk úgy a mértékegységet, hogy az arányossági szorzó 2 legyen, vagyis – ha az $A_1B_1C_1$ háromszög szögeit rendre α-val, β-val és γ-val jelöljük – legyen $A_1B_1 = 2\sin\gamma$, $B_1C_1 = 2\sin\alpha$ és $C_1A_1 = 2\sin\beta$ (2. ábra).



2. ábra

Feltehetjük, hogy az $A_1B_1C_1$ háromszög körüljárása az óramutató járásával ellenkező, azaz pozitív, továbbá, hogy α és β hegyesszögek, ugyanis bármely háromszög csúcsait lehet úgy megbetűzni, hogy e feltételek teljesüljenek.

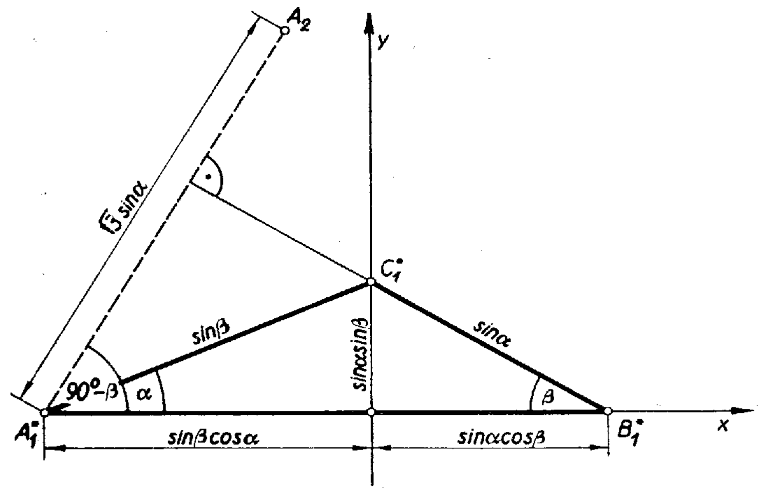
Jelöljük A_1B_1, B_1C_1 és C_1A_1 felezőpontját rendre C_1^*, A_1^* és B_1^*-gal. Ekkor $A_1^*B_1^*C_1^*\triangle \sim A_1B_1C_1\triangle$, szögeik egyenlők, $A_1^*B_1^*C_1^*\triangle$ oldalai feleakkorák, mint az $A_1B_1C_1\triangle$ oldalai, tehát $A_1^*B_1^* = \sin\gamma$, $B_1^*C_1^* = \sin\alpha$ és $C_1^*A_1^* = \sin\beta$, továbbá az $A_1^*B_1^*C_1^*\triangle$ körüljárási értelme ugyancsak pozitív.

Valamely háromszög körüljárási értelmének jellemzésére módot ad a koordináta-geometriának az a képlete, amely az illető háromszög területét csúcspontjainak koordinátáival fejezi ki:

$$(1) \qquad 2t = (x_3 - x_2)y_1 + (x_1 - x_3)y_2 + (x_2 - x_1)y_3,$$

ismeretes ugyanis, hogy ez a képlet pozitív, ill. negatív előjellel adja meg a háromszög területét aszerint, amint a csúcspontoknak az 1, 2, 3 sorrendben való körüljárása pozitív, ill. negatív.

Hogy ezt vizsgálatunkban alkalmazhassuk, helyezzük el $A_1^* B_1^* C_1^*$ háromszögünket a koordináta-rendszerben úgy, hogy A_1^* és B_1^* az X tengelyre; C_1^* pedig az Y-tengelyre essék; ha B_1^* jobbra van A_1^*-tól, akkor C_1^* az $A_1^* B_1^* C_1^*$ háromszög pozitív körüljárási értelme folytán az Y-tengely pozitív felére jut (3. ábra).



3. ábra

A csúcsok koordinátái az oldalak fenti mértékszámaival és a szögekkel kifejezve:

$$A_1^*(-\sin\beta\cos\alpha, 0), \quad B_1^*(\sin\alpha\cos\beta, 0), \quad C_1^*(0, \sin\alpha\sin\beta).$$

Írjuk fel ezután az $A_2B_2C_2$ háromszög csúcspontjainak koordinátáit! Pl. az A_2 pontot úgy nyerjük, hogy A_1^*-ból merőleges félegyenest bocsátunk $B_1^*C_1^*$-ra, és erre A_1^*-tól kezdve rámérjük a $2\sin\alpha$ oldalú szabályos háromszög magasságát, $\sqrt{3}\sin\alpha$-t (2. ábra). Így A_2, B_2 és C_2 koordinátái a 3. ábráról:

$$\begin{aligned} A_2(&\sqrt{3}\sin\alpha\sin\beta - \sin\beta\cos\alpha, \sqrt{3}\sin\alpha\cos\beta), \\ B_2(&-\sqrt{3}\sin\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta, \sqrt{3}\sin\beta\cos\alpha), \\ C_2(&0, \quad -\sqrt{3}\sin\gamma + \sin\alpha\sin\beta), \end{aligned}$$

figyelembe véve, hogy $\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$ és $\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$. Ezekkel kifejezve az $A_2B_2C_2\triangle$ kétszeres területét, $2t > 0$ azt fejezi ki, hogy az $A_2B_2C_2\triangle$ körüljárási értelme pozitív, tehát *megegyezik* az $A_1^*B_1^*C_1^*$ *körüljárási értelmével.*

(1) szerint tehát kell, hogy fennálljon:

$$\begin{aligned} 2t =& (\sqrt{3}\sin\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta)\sqrt{3}\sin\alpha\cos\beta + (\sqrt{3}\sin\alpha\sin\beta - \\ & - \sin\beta\cos\alpha)\sqrt{3}\sin\beta\cos\alpha + (-\sqrt{3}\sin\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta - \\ & - \sqrt{3}\sin\alpha\sin\beta + \sin\beta\cos\alpha)(-\sqrt{3}\sin\gamma + \sin\alpha\sin\beta) > 0. \end{aligned}$$

A kijelölt műveletek elvégzése után a $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ és a $\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha+\beta) = \sin[180° - (\alpha+\beta)] = \sin\gamma$ azonosságok felhasználásával egyenlőtlenségünk a következő alakra hozható:

$$(2) \qquad 10\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma > \sqrt{3}(\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma).$$

Ez a kitűzött feladat megoldhatóságának feltétele. Eszerint bármely adott $A_1B_1C_1$ háromszögről számítás útján megállapíthatjuk, hogy a belőle a fentiek szerint előálló $A_2B_2C_2$ háromszög körüljárási értelemben megegyező-e vele vagy sem.

A (2) feltétel α, β és γ-ban szimmetrikus, ezért akkor is érvényes, ha α vagy β nem hegyesszög.

*

További érdekes kérdés: *milyen határok közé esnek maguk a szögei a* (2) *feltételnek eleget tevő háromszögeknek?* Hogy erre megfelelhessünk, avégett – szimmetriáját feláldozva – olyan új alakot adunk (2)-nek, amelyben csak az α szög, továbbá a másik két szög $\beta - \gamma$ különbsége szerepel.

A továbbiakban feltesszük, hogy β nem kisebb γ-nál, azaz $\beta \geq \gamma$.

Vonjunk le (2) mindkét oldalából $2\sqrt{3}\sin\beta\sin\gamma$-t:

$$(3) \qquad (5\sin\alpha - \sqrt{3})2\sin\beta\sin\gamma > \sqrt{3}[\sin^2\alpha + (\sin\beta - \sin\gamma)^2].$$

Itt a baloldalon

$$2\sin\beta\sin\gamma=\cos(\beta-\gamma)-\cos(\beta+\gamma)=\cos(\beta-\gamma)+\cos\alpha, \tag{3b}$$

és ez a kifejezés pozitív, mert $\sin\alpha$ és $\sin\beta$ pozitív. A jobboldalon ismert azonosságok felhasználásával a következő átalakításokat végezhetjük:

$$(\sin\beta-\sin\gamma)^2=2\cos^2\frac{\beta+\gamma}{2}\cdot 2\sin^2\frac{\beta-\gamma}{2}=$$

$$=[1+\cos(\beta+\gamma)][1-\cos(\beta-\gamma)]=(1-\cos\alpha)[1-\cos(\beta-\gamma)]. \tag{3j}$$

Ezeknek (3)-ba való beírása után minden tagot az egyenlőtlenség baloldalára gyűjtve:

$$(5\sin\alpha-\sqrt{3})[\cos\alpha+\cos(\beta-\gamma)]-\sqrt{3}\big\{\sin^2\alpha+(1-\cos\alpha)[1-\cos(\beta-\gamma)]\big\}>0. \tag{4}$$

Jelöljük most már a bal oldalon álló két változós függvényt – a szokásos módon – $f(\alpha,\beta-\gamma)$-val:

$$f(\alpha,\beta-\gamma)=(5\sin\alpha-\sqrt{3})[\cos\alpha+\cos(\beta-\gamma)]-\sqrt{3}\left\{\sin^2\alpha+(1-\cos\alpha)[1-\cos(\beta-\gamma)]\right\} \tag{5}$$

és vizsgáljuk meg értékváltozását, pontosabban a 0-hoz való nagyságviszonyát, azaz előjelét α és $\beta-\gamma$ különböző értékei mellett.

Foglalkozzunk először a $\beta=\gamma$ esettel, azaz szorítkozzunk egyenlőszárú háromszögekre. Ekkor $\cos(\beta-\gamma)=1$, tehát

$$f(\alpha,\beta-\gamma)_{\beta=\gamma}=(5\sin\alpha-\sqrt{3})(\cos\alpha+1)-\sqrt{3}\sin^2\alpha,$$

és ez csak α-nak függvénye. Hogy előjeléről tájékozódhassunk, számítsuk ki először 0-helyeit, vagyis az

$$(5\sin\alpha-\sqrt{3})(\cos\alpha+1)-\sqrt{3}\sin^2\alpha=0$$

egyenlet gyökeit. A második tagban $\sin^2\alpha=(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)$ helyettesítés után kiemelhető az $1+\cos\alpha$ tényező, és ezzel az egyenletet oszthatjuk, mert ez csak $\alpha=180^\circ$-nál válik 0-vá, amely esetben már nem jön létre háromszög. Az így adódó

$$5\sin\alpha-\sqrt{3}-\sqrt{3}(1-\cos\alpha)=0$$

egyenletet $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}$ helyettesítés után az ismert módon megoldva, a következő gyököket nyerjük:

$$\cos\alpha_1=\frac{13}{14};\ \sin\alpha_1=\frac{3\sqrt{3}}{14},\ \alpha_1=21^\circ 47{,}2';$$
$$\cos\alpha_2=-\frac{1}{2},\ \sin\alpha_2=\frac{\sqrt{3}}{2},\ \alpha_2=120^\circ.$$

A két gyök, α_1 és α_2, a $0<\alpha<180^\circ$ intervallumot három részre osztja. Helyettesítésekkel meggyőződhetünk arról, hogy

$$0<\alpha<\alpha_1 \quad \text{és} \quad \alpha_2<\alpha<180^\circ \quad \text{esetén} \quad f(\alpha,\beta-\gamma)_{\beta=\gamma}<0,$$

viszont

$$\alpha_1<\alpha<\alpha_2 \quad \text{esetén} \quad f(\alpha,\beta-\gamma)_{\beta=\gamma}>0 \tag{6}$$

(pl. $\cos\alpha'=0{,}96$ (egyben $\alpha'=0{,}28$) mellett $0<\alpha'<\alpha_1$ és $f(\alpha',\beta-\gamma)_{\beta=\gamma}=2{,}744-2{,}0384\sqrt{3}<0$; $\cos\alpha''=0$ (egyben $\sin\alpha''=1$) mellett $f(\alpha'',\beta-\gamma)_{\beta=\gamma}=5-2\sqrt{3}>0$; $\cos\alpha'''=-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\text{egyben}\sin\alpha=\frac{1}{2}\right)$ mellett $f(\alpha''',\beta--\gamma)_{\beta=\gamma}=4-\frac{5\sqrt{3}}{2}<0$, tehát $\beta=\gamma$ esetén a (4) egyenlőtlenség a középső intervallumra teljesül, a két szélsőre nem, vagyis az α szög (és természetesen β és γ is) csak $21^\circ 47{,}2'$ és 120° közötti értékeket vehet fel.

Mi a helyzet, ha $\beta\neq\gamma$? Látjuk, hogy (3) jobb oldala pozitív, és miután (3) bal oldalának (3b) második tényezője szintén pozitív, kell, hogy az első tényező, $5\sin\alpha-\sqrt{3}$ is pozitív legyen. Ha már most (4)-ben rögzítjük α értékét és $(\beta-\gamma)$-t változtatjuk, az így létrejött egyenlőtlenségek közül a „legerősebb” egyenlőtlenség – amelyben a két oldal különbsége a legnagyobb – éppen $\beta=\gamma$-hoz tartozik, ugyanis $\beta-\gamma$ növelésével $\cos(\beta-\gamma)$ csökken, a kisebbítendő csökken, a (pozitív) kivonandó növekszik, tehát a különbség csökken, az egyenlőtlenség „gyengül”. Eszerint $\beta\neq\gamma$ esetén sem nyerhetünk α-ra (6)-nál tágabb határokat, hiszen bármely $f(\alpha,\beta-\gamma)_{\beta\neq\gamma}>0$ esetben fennáll a nála erősebb $f(\alpha,\beta-\gamma)_{\beta=\gamma}>0$ egyenlőtlenség is. Ez utóbbiról azonban megállapítottuk, hogy csak a (6) intervallumra teljesül.

Az, hogy α a (6) intervallumba tartozzék, a legutóbbiak szerint csupán *szükséges* feltétele (4), ill. (2) teljesülésének; vagyis ha α nem a (6)-ból való, akkor semmiesetre sem állhat, ellenben lehetséges, hogy valamely (6)-beli α és „elég nagy” $\beta-\gamma$ esetén (4) nem teljesül.

*

Állapítsuk meg végül, hogy *milyen határok közti a mellett áll fenn* α (4) *egyenlőtlenség* β *és* γ *minden lehetséges értékpárjára.*

A következőkben jelentse α a háromszög legkisebb szögét [$\alpha \leq 60^\circ$ és (6) szerint $\alpha > 21^\circ 47{,}2'$]. Ahogyan a (4) egyenlőtlenség akkor a legerősebb, ha $\beta-\gamma$ a lehető legkisebb, hasonlóan akkor a leggyengébb, ha $\beta-\gamma$ a lehető legnagyobb. Adott α mellett ez akkor következik be, ha γ egészen α-ig csökken: $\gamma=\alpha$. Ekkor $\beta=180^\circ-2\alpha$, $\beta-\gamma=180^\circ-3\alpha$. Ha az adott α-hoz tartozó leggyengébb $f(\alpha,\beta-\gamma)_{\beta-\gamma=180^\circ-3\alpha}>0$ egyenlőtlenség fennáll, akkor a β és γ szögek α és 120° között bármely olyan értékpárt felvehetnek, amelyre teljesül $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$ és $\beta\geq\gamma\geq\alpha$. Vizsgáljuk tehát, hogyan változik az (5)-ből $\beta-\gamma=180^\circ-3\alpha$ -val adódó, és így csak α-tól függő

$$f(\alpha,\beta-\gamma)_{\beta-\gamma=180^\circ-3\alpha}=(5\sin\alpha-\sqrt{3})[\cos\alpha+\cos(180^\circ-3\alpha)]- \\ -\sqrt{3}\left\{\sin^2\alpha+(1-\cos\alpha)[1-\cos(180^\circ-3\alpha)]\right\} \tag{7}$$

előjele, mely α értékekre lesz pozitív.

Ismert azonosságok alapján

$$\cos(180^\circ-3\alpha)=-\cos 3\alpha=-\cos(2\alpha+\alpha)= \\ =(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)\cos\alpha+2\sin^2\alpha\cos\alpha=(2\sin^2\alpha-1)\cos\alpha+ \\ +2\sin^2\alpha\cos\alpha=4\sin^2\alpha\cos\alpha-\cos\alpha.$$

Ezt (7)-be behelyettesítve a műveletek elvégzésével és a $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ azonosság felhasználásával függvényünk a következő alakú lesz

$$f(\alpha,\beta-\gamma)_{\beta-\gamma=180^\circ-3\alpha}=2\sin^2\alpha[10\sin\alpha\cos\alpha-\sqrt{3}(\sin^2\alpha+3\cos^2\alpha)].$$

A 0-helyek kiszámítására szolgáló egyenletünket oszthatjuk $2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$-val, mert e szorzat a

$$21^\circ 47{,}2'<\alpha\leq 60^\circ \tag{8}$$

intervallumban nem 0. Az így adódó

$$10\,\mathrm{tg}\,\alpha-\sqrt{3}\,\mathrm{tg}^2\,\alpha-3\sqrt{3}=0$$

egyenletnek (8)-ban egyetlen gyöke

$$\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}-\text{ból}\qquad \alpha=30^\circ,$$

és behelyettesítéssel megállapíthatjuk, hogy az $f(\alpha,\beta-\gamma)_{\beta-\gamma=180^\circ-3\alpha}>0$ egyenlőtlenséget az $\alpha>30^\circ$ értékek elégítik ki.

Ebből az következik, hogy (4), és így (2) is, minden esetben fennáll, ha a háromszögnek mind a három szöge 30° és 120° közé esik. Ez tehát elegendő feltétele az eredeti feladat megoldhatóságának, ezt közöltük múlt számunkban az I. megoldás megjegyzésében.