A cikkünk első részében felvetett feladat teljes megoldásához a következő kérdések tisztázandók.

a) „Jó” háromszögben van-e mindig (5) tulajdonságú pont?

b) Ha van, lehet-e több?

c) Az (5) tulajdonság fennállása egy belső P pontra vajon *elégséges* is-e ahhoz „jó” háromszög esetén, hogy P minimizáló pont legyen?

d) Az (5) tulajdonságú pont, ha van, hogyan szerkeszthető?

e) „Rossz” háromszög esetén lehet-e több (8) tulajdonságú pont?

f) A (8) tulajdonság P-re fennállása „rossz” háromszög esetén *elégséges*-e ahhoz, hogy P minimalizáló pont legyen?

d) Kérdésre a válasz igen könnyű. Nyilván

$$\frac{\overline{PP_1}}{\overline{PP_2}} = \frac{p_1}{p_2}, \tag{12}$$

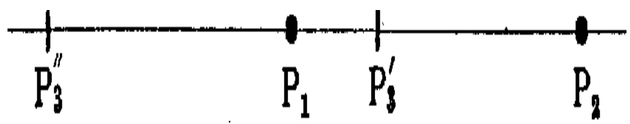
azaz P a P_1 és P_2 pontokhoz, valamint a $\frac{p_1}{p_2}$ arányhoz tartozó Apollonius-körön fekszik, amely ismert módon szerkeszthető. Mivel

$$\frac{\overline{PP_2}}{\overline{PP_3}} = \frac{p_2}{p_3},$$

tehát P a P_2 és P_3 pontokhoz, valamint a $\frac{p_2}{p_3}$ arányhoz tartozó Apollonius-körön is fekszik, azaz P, mint ezek metszéspontja, meg van szerkesztve. A *b)* kérdésre vonatkozólag a felelet az, hogy minden háromszögben *legfeljebb egy* (5) tulajdonságú P pont van. Ennek igazolására legyen először $p_1 < p_2 < p_3$. Ekkor azt állítjuk, hogy a (12) tulajdonságú P pontokból álló kör középpontja a P_1P_2 oldalon, de P_1P_2 szakaszon kívül van. Ugyanis, ha a P_1P_2 szakaszon levő P_3' pontra $\frac{\overline{P_1P_3'}}{\overline{P_3'P_2}} = \frac{p_1}{p_2}$, akkor $P_1P_3' = \frac{p_1}{p_1+p_2}\overline{P_1P_2}$, továbbá, ha a P_1-től P_2-vel ellentétes oldalra eső P_3'' pontra $\frac{\overline{P_1P_3''}}{\overline{P_3''P_2}} = \frac{p_1}{p_2}$, akkor

$$\overline{P_3''P_1} = \frac{p_1}{p_2 - p_1} P_1P_2,$$

azaz $\overline{P_3''P_1} > \overline{P_3'P_1}$, a kérdéses kör középpontja pedig $\overline{P_3'P_3''}$ felezőpontja.



3. ábra

Tehát mindhárom Apollonius-kör középpontja a háromszög egy-egy oldalán van, de mind a meghosszabbításokon. Ha mármost a háromszögben *legalább két* pont volna (5) tulajdonsággal, akkor a két pont felezőmerőlegesén az Apollonius-körök középpontjai szintén rajta volnának, ami pedig legalább két oldalt *belül* metsz, ez viszont ellentmondás. Ha $p_1 < p_2 < p_3$ helyett $p_1 \leqq p_2 \leqq p_3$ áll, a bizonyítás lényegtelenül módosul.

Tekintsük a legkényesebb *c)* kérdést. Amit mi csináltunk, az az, hogy megmutattuk, hogy „jó” $P_1P_2P_{3\triangle}$ esetén a sík egyetlen olyan P pontja sem lehet minimizáló pont, amely nem elégíti ki (5)-öt, mert

$$\max\left(\frac{1}{p_1}\overline{PP_1}, \frac{1}{p_2}\overline{PP_2}, \frac{1}{p_3}\overline{PP_3}\right)$$

csökkenthető és ezen eljárás *csak* az (5) tulajdonságú P-re (amennyiben ilyen létezik) nem vezet csökkentéshez. Ebből 100 évvel ezelőtt még olyan matematikus is, mint Jacob Steiner, a pásztorfiúból lett híres geométer, arra következtetett volna, hogy (5) tulajdonságú P pont *létezik* és minimizál. Ez valóban korrekt volna, ha biztos volna, hogy a maximumot minimizáló keresett P pont és a maximum minimuma tényleg léteznek. Jólismert példa azonban az itt fellépő tényállásra azon kérdés, melyik a legnagyobb pozitív egész. Ezen maximum nyilván nem létezik. Viszont minden egészhez a négyzetét hozzárendelve adódik egyfelől, hogy semmilyen 1-nél nagyobb pozitív egész nem lehet maximum, mert a hozzárendelt érték egy *nagyobb* pozitív egész. Másfelől *ezen* eljárás az 1-hez önmagát rendeli hozzá, ami nála nem nagyobb; ha tehát Steiner következtetési módja helyes volna, ez azt adná, hogy 1 a legnagyobb pozitiv egész, ami nem áll. Viszont Weierstrass alapvető vizsgálatai a szélsőértékfeladatok egy igen tág osztályára, amelybe a miénk is tartozik, a minimum létezését eleve biztosítják; ebből következik tehát az *a)* és *c)* kérdésekre adódó feleletként, hogy „jó” háromszögben mindig van (5) tulajdonságú pont és ez tényleg minimizáló pont.

Az *e)* kérdésre a (11) alatti gondolat segítségével adhatunk nemleges választ. Ha ugyanis a (8) tulajdonság a P_1P_2 oldalon teljesülne egy $P = P_3'$ pontra és P_2P_3-on egy $P = P_1'$ pontra, akkor (11)-et előbb P_1P_2-re alkalmazva $Q = P_1'$-vel, adódik

$$\max\left(\frac{1}{p_1}\overline{P_1P_3'},\ \frac{1}{p_2}\overline{P_2P_3'},\ \frac{1}{p_3}\overline{P_3P_3'}\right) < \max\left(\frac{1}{p_1}\overline{P_1'P_1},\ \frac{1}{p_2}\overline{P_1'P_2}, \frac{1}{p_3}\overline{P_1'P_3}\right),$$

azután (11)-et P_2P_3-ra alkalmazva $Q = P_3'$-vel

$$\max\left(\frac{1}{p_1}\overline{P_1P_1'}, \frac{1}{p_2}\overline{P_2P_1'}, \frac{1}{p_3}\overline{P_3P_1'}\right) < \max\left(\frac{1}{p_1}\overline{P_1P_3'},\ \frac{1}{p_2}\overline{P_2P_3'},\ \frac{1}{p_3}\overline{P_3P_3'}\right),$$

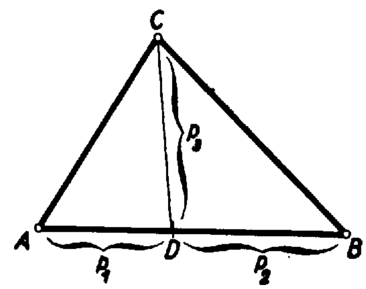
de ez a két egyenlőtlenség egymásnak ellentmond.

Tehát „rossz" háromszög esetén csak az egyetlen (8) tulajdonságú pont lehet a minimizáló. Mivel Weierstrass előbb említett általános tétele szerint minimizáló pont van, tehát a minimizáló pont ez esetben tényleg a (8) alatti pont, igenlő választ adva az *f)* kérdésre.

Összefoglalva a feladat megoldása a következő.

Ha a háromszög (9)–(10) *értelemben „jó", akkor a háromszögben egyetlen P pont van az* (5) *tulajdonsággal, és ez a minimizáló pont. Ha a háromszög nem „jó", akkor egyetlen pont van a háromszög kerületén, amelyre* (8) *teljesül, és ez a minimizáló pont.*

Hogy a „rossz" háromszögek kissé jobban láthatók legyenek, megjegyzem, hogy ezek a következő módon származtathatók. Legyen a látható 4. ábrán $\overline{AD} = p_1$, $\overline{BD} = p_2$ és $\overline{CD} = p_3$, ilyen háromszög végtelen sok van és e háromszögek C csúcsai a D középpontú és p_3 sugarú körön fekszenek.



4. ábra

Ha ezeket mintaháromszögeknek nevezzük, akkor azok a „rossz" háromszögek, amelyek hasonlóak egy olyanhoz, melynek alapja AB és benne van egy mintaháromszögben. Belátható volna, hogy a „rossz" háromszögekre is létezik az (5) tulajdonságú pont, csak a háromszögön kívül esik; mivel erre a szélsőértékfeladat szempontjából nincs szükség, ennek bizonyításával nem foglalkozunk.

Mint általában lenni szokott, egy megoldott feladat egy csomó egyéb kérdést is hoz felszínre, melyek érdekessége már elsősorban matematikai természetű és gyakran bizonyos szimmetriaérzék hozza őket létre. Így jelen feladathoz kézenfekvő azt kérdezni, milyen R pont esetén lesz

(14) $$\min\left(\frac{1}{p_1}\overline{RP_1},\ \frac{1}{p_2}\overline{RP_2},\ \frac{1}{p_3}\overline{RP_3}\right)$$

maximális. Könnyű azonban látni, hely ennek a feladatnak nincs megoldása. Ha ugyanis R a háromszögtől „messze" van, akkor (14) értéke „nagy", sőt tetszőleges nagy lehet, amint R elég messze van. Másik kézenfekvő kérdés a *csúcsoktól* való helyett az *oldalaktól* valókat venni és azt kérdezni, hogy adott pozitív q_1, q_2 és q_3 mellett mikor lesz

$$\max\left(\frac{1}{q_1}d_1(P),\ \frac{1}{q_2}d_2(P),\ \frac{1}{q_3}d_3(P)\right)$$

minimális, ahol $d_1(P)$, $d_2(P)$, $d_3(P)$ egy P belső pontnak az oldalaktól való távolságai. Ekkor azt állítjuk, hogy a $P_1P_2P_3$ háromszögben van pontosan egy Q pont, amelyre

(15) $$\frac{1}{q_1}d_1(Q) = \frac{1}{q_2}d_2(Q) = \frac{1}{q_3}d_3(Q)$$

és ez lesz az egyetlen minimizáló pont. Ennek bizonyítása hasonló az előbbihez, de annál egyszerűbb; a két megoldás hasonlósága mégis alkalmas lesz annak illusztrálására, hogy itt egységes módszerről van szó, szemben a tisztán geometriai módszerek individualitásával.

Hogy (15) tulajdonságú pont a háromszögben van és egyetlen egy van, az rögtön következik onnan, hogy azon R pontok mértani helye, melyekre

$$\frac{\mathrm{d}_1(R)}{\mathrm{d}_2(R)} = \frac{q_1}{q_2},$$

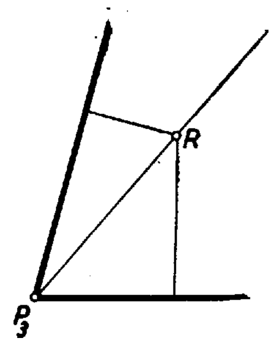
nyilván egy P_3-ból kiinduló egyenes. Így a (15) alatti Q pont, mint a

$$\frac{\mathrm{d}_1(R)}{\mathrm{d}_2(R)} = \frac{q_1}{q_2} \quad \text{és} \quad \frac{\mathrm{d}_1(R)}{\mathrm{d}_3(R)} = \frac{q_1}{q_3}$$

egyenesek metszéspontja adódik; ezen a

$$\frac{\mathrm{d}_2(R)}{\mathrm{d}_3(R)} = \frac{q_2}{q_3}$$

egyenes nyilvánvalóan áthalad.



5. ábra

Hogy minimizáló pont *létezik*, az ismét Weierstrass általános tételéből következik. Elég tehát igazolni, hogy ha R különbözik a (15) alatti Q-tól, akkor R nem lehet minimizáló pont. Tegyük fel először, hogy

$$\frac{\mathrm{d}_1(R)}{q_1} \leqq \frac{\mathrm{d}_2(R)}{q_2} < \frac{\mathrm{d}_3(R)}{q_3}. \tag{16}$$

Ekkor R-et „kissé” közelítve a P_1P_2 oldalhoz, $\frac{1}{q_3}d_3(R)$ fogy; ha a közelítés elég kicsi, akkor $\frac{1}{q_1}\mathrm{d}_1(R)$ és $\frac{1}{q_2}\mathrm{d}_2(R)$ esetleg nőnek, de mégsem annyit, hogy „elérjék” $\frac{1}{q_3}\mathrm{d}_3(R)$-et, azaz az elmozdítás következtében

$$\max\left(\frac{1}{q_1}\mathrm{d}_1(R),\ \frac{1}{q_2}\mathrm{d}_2(R),\ \frac{1}{q_3}\mathrm{d}_3(R)\right)$$

fogy. Ha

$$\frac{1}{q_1}\mathrm{d}_1(R) < \frac{1}{q_2}\mathrm{d}_2(R) = \frac{1}{q_3}\mathrm{d}_3(R), \tag{17}$$

akkor R-et a P_1R egyenes mentén P_1-hez közelítve „egy kissé” $\mathrm{d}_2(R)$ és $\mathrm{d}_3(R)$ mindkettője fogy, de még úgy, hogy

$$\max\left(\frac{1}{q_1}\mathrm{d}_1(R),\ \frac{1}{q_2}\mathrm{d}_2(R),\ \frac{1}{q_3}\mathrm{d}_3(R)\right)$$

is fogy. Tehát tényleg a csak (15) alatti Q pont lehet minimizáló.

Említsük meg végül az előbbi tétel egy érdekes következményét. A $P_1P_2P_{3\triangle}$ egy S pontját nevezzük nevezetes pontnak, ha van oly extremumfeladat, melynek csak az előírt S pont tesz eleget. A fenti q_v-k gyanánt

$$q_v = d_v(S)$$

értékeket választva $Q = S$-re és csak erre lesz

$$\max\left(\frac{\mathrm{d}_1(Q)}{\mathrm{d}_1(S)},\ \frac{\mathrm{d}_2(Q)}{\mathrm{d}_2(S)},\ \frac{\mathrm{d}_3(Q)}{\mathrm{d}_3(S)}\right)\Bigg|$$

minimális, ebben az értelemben a háromszög *minden* pontja nevezetes pont!

A hamutálcától indultunk és eljutottunk a szélsőértékfeladatok egy osztályához, melyeket minimax-feladatoknak nevezünk. Ezen feladatokhoz eljuthattunk volna egy egészen más feladatból kiindulva is. Ha egy kertben bizonyos számú fát akarunk ültetni, ezek ültetésének főszempontja az, hogy gyökereik egymás elől lehetőleg ne szívják el a talaj tápnedveit. Itt a fákat pontoknak tekintve ezeket úgy kell elhelyezni, hogy minden kettő lehetőleg messze legyen egymástól, aminek matematikai megfogalmazása úgy szól, hogy

$$\min_{i\neq k} \overline{P_iP_k}$$

maximális legyen. Ez azonban sokkal nehezebb az előbbi feladatoknál és általában nincs is megoldva. A minimax-feladatok a felsőbb matematikában egyre jelentősebb szerepet játszanak a múlt század közepe óta, úgy hogy hasznosnak és érdekesnek tartom, hogy ezekre már ilyen elemi fokon is rá lehet irányítanom a figyelmet.