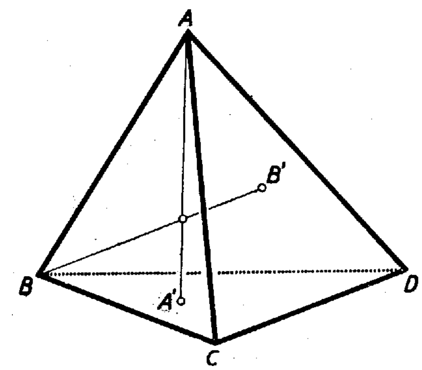
3. Lényeges eltérést tapasztalunk a háromszögektől a tetraéder *magasságvonalainak* (a tetraéder csúcsaiból a szemközti lapokra bocsátott merőleges egyeneseknek) vizsgálatánál. Míg a háromszög magasságvonalai mindig egy pontban (a háromszög magasságpontjában) metszik egymást, a tetraéder négy magasságvonala általában nem rendelkezik ezzel a tulajdonsággal. Sőt általában még az sem teljesül, hogy a tetraéder *két* magasságvonala metszi egymást. Bebizonyítjuk ugyanis a tetraéder magasságvonalainak következő tulajdonságát:

A tetraéder két csúcsából kiinduló magasságvonalak akkor és csak akkor metszik egymást, ha a csúcsokat összekötő él merőleges a szemközti élre.

Bizonyítás. Jelöljük A'-vel, ill. B'-vel az A, ill. B csúcsból kiinduló magasságvonalak talppontját a szemközti lapon (8. ábra).



8. ábra

Ha AA' és BB' metszik egymást, akkor egy síkban vannak; ez a sík merőleges a BCD, ill. ACD síkokra, hiszen tartalmazza az ezekre merőleges AA', ill. BB' egyenest; tehát merőleges a BCD és ACD síkok CD metszésvonalára is; mivel pedig tartalmazza az AB egyenest, kapjuk, hogy

$$AB \perp CD$$

(ugyanis ha egy egyenes merőleges egy síkra, akkor a sík minden egyenesére merőleges).

Megfordítva, tegyük fel, hogy AB és CD merőlegesek egymásra. Mivel az AA' magasságvonal merőleges a BCD síkra, tehát merőleges CD-re is. Innen adódik, hogy CD merőleges az ABA' síkra, hiszen két egyenesére merőleges. Hasonlóan kapjuk, hogy CD merőleges az ABB' síkra is. Mivel pedig az AB egyenesen keresztül egyetlen CD-re merőleges sík fektethető, az ABA' és ABB' síkok azonosak, vagyis AA' és BB' egy síkban vannak, tehát metszik egymást (párhuzamosak nem lehetnek, mert egymással nem párhuzamos tetraéderlapokra merőlegesek).

A fenti tételből közvetlenül adódik a tetraéder magasságvonalainak a következő tulajdonsága:

Ha a tetraéder két magasságvonala metszi egymást, akkor a másik kettő is metszi egymást.

Ha pl. az A és B pontokból kiinduló magasságvonalak metszik egymást, akkor az AB él merőleges a CD élre. De ekkor egyúttal a CD él is merőleges az AB élre, ez pedig az előző tétel értelmében biztosítja a C és D csúcsokból kiinduló magasságvonalak metszését. Ha e két metszéspont egybeesik, akkor a tetraéder négy magasságvonala egyetlen közös ponton megy át; ezt a pontot a tetraéder *magasságpontjának* nevezzük. A két metszéspont azonban általában különböző; a magasságpont létezésére a következő szükséges és elégséges feltétel mondható ki:

A tetraédernek akkor és csak akkor van magasságpontja, ha a szemközti élek páronként merőlegesek egymásra.

A feltétel szükségessége nyilvánvaló. Ha ugyanis van magasságpont, akkor mindegyik magasságvonal metszi mindegyiket ugyanabban a pontban, tehát a magasságvonalakra vonatkozó első tételből adódik, hogy bármelyik él merőleges a szemköztire.

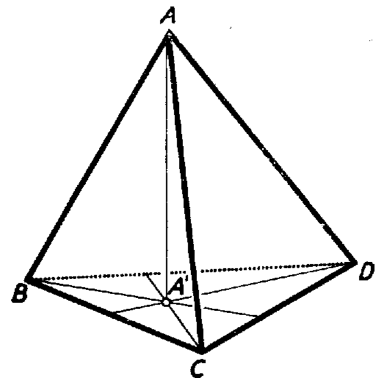
Megfordítva, ha a szemközti élek merőlegesek egymásra, akkor bármely két magasságvonal metszi egymást. Ekkor viszont egy térbeli egyenesekre vonatkozó általános tételből következik (l. a 471. gyakorlatot), hogy a magasságvonalak vagy mind egy síkban vannak, vagy egy ponton mennek át. De egy síkban nem lehetnek, mert akkor a tetraéder csúcsai is egy síkban lennének, tehát egy ponton mennek át, és így van magasságpont.

Megemlítjük, hogy a tétel kimondásánál túl sokat követeltünk meg. *Elég annyit feltenni, hogy a tetraéder három szemközti élpárja közül kettő merőleges egymásra, ebből a harmadik szemközti élpár merőlegessége már következik.*

Legyen pl.

$$AB \perp CD \qquad \text{és} \qquad BC \perp AD.$$

A magasságvonalakra vonatkozó első tétel bizonyításánál láttuk, hogy AB és CD merőlegességéből következik az is, hogy CD merőleges az ABA' síkra, tehát merőleges ezen síknak a BCD síkkal alkotott BA' metszésvonalára is. A BA' egyenes tehát a BCD háromszög egyik magasságvonala (9. ábra).



9. ábra

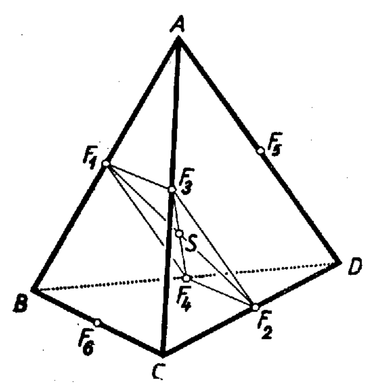
Hasonlóan adódik BC és AD merőlegességéből, hogy DA' is magasságvonal a BCD háromszögben, amiből következik már, hogy A' a BCD háromszög magasságpontja. Ekkor viszont $CA' \perp BD$, és mivel $AA' \perp BD$, következik, hogy BD merőleges az ACA' síkra, tehát merőleges az ezen síkban fekvő AC egyenesre is, és ezt akartuk bizonyítani.

A magasságponttal rendelkező tetraédert *ortocentrikus tetraédernek* nevezzük (ortocentrum=magasságpont). A fenti bizonyításból kiolvashatjuk az ortocentrikus tetraédernek azt a tulajdonságát, hogy csúcsainak a szemközti lapokon levő merőleges vetületei a lapok magasságpontjai. Ezt figyelembe véve könnyű megadni olyan tetraédert, melynek egyik szemközti élpárja merőleges egymásra, de nincs magasságpontja. Ilyen pl. az a tetraéder, melynek alapja a (nem derékszögű, de különben tetszőleges) BCD háromszög, negyedik csúcsának, A-nak a szemközti lapon levő merőleges vetülete megegyezik a BCD háromszög valamelyik csúcsával, pl. B-vel. Ennél a tetraédernél nyilván AB merőleges CD-re, de a többi szemközti élek nem merőlegesek egymásra, tehát nincs magasságpont.

Az ortocentrikus tetraéder nemcsak a szemközti élek merőlegességével jellemezhető. Fennáll ugyanis a következő tétel:

A tetraéder akkor és csak akkor ortocentrikus, ha a szemközti éleinek felezőpontjait összekötő egyenesszakaszok (a tetraéder éltengelyei) egyenlők.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az $ABCD$ tetraéder ortocentrikus. Jelöljük az élek felezőpontjait a 10. ábra szerint F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6-tal.



10. ábra

Tudjuk, hogy a szemközti élek felezőpontjait összekötő egyenesszakaszokat, pl. F_1F_2-t és F_3F_4-et a súlypont felezi, amiből következik, hogy $F_1F_3F_2F_4$ parallelogramma, melynek középpontja S.[4] Mivel a tetraéder ortocentrikus, szemközti élei, pl. BC és AD merőlegesek egymásra. De BC és AD merőlegességéből következik a velük párhuzamos F_1F_3 és F_3F_2 oldalak merőlegessége is, amiből viszont adódik, hogy $F_1F_3F_2F_4$ téglalap. Mivel pedig a téglalap átlói egyenlők, kaptuk, hogy $F_1F_2 = F_3F_4$. Hasonlóan adódik, hogy $F_3F_4 = F_5F_6$, amiből már következik, hogy az ortocentrikus tetraéder mindhárom éltengelye egyenlő hosszúságú.

Megfordítva, tegyük fel, hogy a tetraéder éltengelyei egyenlő hosszúságúak. Ez azt jelenti, hogy pl. az $F_1F_3F_2F_4$ parallelogramma átlói egyenlők, amiből következik, hogy az téglalap. De ekkor F_1F_3 és F_3F_2, és így a velük párhuzamos

[4]Az a tény, hogy $F_1F_3F_2F_4$ parallelogramma, következik abból is, hogy F_1F_3 az ABC háromszögben, F_2F_4 a DBC háromszögben a BC oldallal párhuzamos középvonal, és így

$$F_1F_3 \parallel F_2F_4, \qquad \text{valamint} \qquad F_1F_3 = F_2F_4 = \frac{1}{2}BC.$$

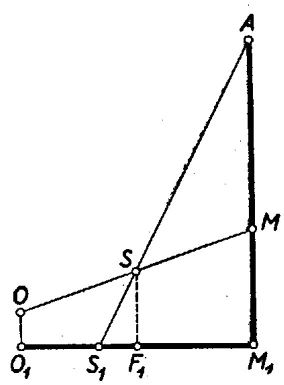
BC és AD élek is merőlegesek egymásra. Hasonlóan kapjuk, hogy a tetraéder másik két szemközti élpárja is merőleges egymásra, tehát a tetraéder ortocentrikus.

Megemlítjük a kapott tételnek egy érdekes következményét. Mivel az ortocentrikus tetraéder éltengelyei egyenlő hosszúságúak, és a súlypont az éltengelyeket felezi, a súlypont egyenlő távol van a tetraéder élfelezőpontjaitól. Más szóval, *ortocentrikus tetraédernél a hat élfelezőpont egy gömbön helyezkedik el, melynek középpontja a súlypont. Ezt a gömböt nevezzük az ortocentrikus tetraéder második Feuerbach-gömbjének.* (Az elnevezés indokolását lásd később.)

4. Ismeretes a háromszögnek az a nevezetes tulajdonsága, hogy a magasságpont, a súlypont és a körülírt kör középpontja egy egyenesen van, mégpedig a súlypont a másik kettő által meghatározott szakasznak a körülírt kör középpontjához közelebbi harmadolópontja. Ezt az egyenest a háromszög Euler-egyenesének nevezzük. A tetraéder fenti nevezetes pontjai is rendelkeznek hasonló tulajdonsággal. (A következőkben feltesszük, hogy a tetraédernek van magasságpontja, vagyis ortocentrikus.)

Ortocentrikus tetraédernél a magasságpont (M), *a súlypont* (S) *és a körülírt gömb középpontja* (O) *egy egyenesen van; a súlypont a másik kettő által meghatározott szakasz felezőpontja.* Ezt az egyenest a tetraéder *Euler-egyenesének* nevezzük.

A *bizonyításnál* fel fogjuk használni a háromszög Euler-egyenesére vonatkozó tételt. Jelöljük a tetraéder magasságpontjának merőleges vetületét a tetraéder valamelyik, pl. BCD lapján M_1-gyel, a körülírt gömb középpontjának merőleges vetületét ugyanezen a lapon O_1-gyel. A magasságpontnak és a körülírt gömb középpontjának vizsgálatánál láttuk, hogy M_1 a BCD háromszög magasságpontja, O_1 a körülírt kör középpontja. Az O_1M_1 egyenesen, a BCD háromszög Euler-egyenesén rajta van a háromszög S_1 súlypontja. Mivel továbbá az M_1 pont egyúttal a tetraéder A csúcsának is merőleges vetülete a BCD lapon, a tetraéder AS_1 súlyvonala, és így az ezen levő S súlypont is az O és M pontokkal együtt benne van az O_1M_1 egyenesen átmenő, a BCD síkra merőleges síkban (11. ábra).



11. ábra

Tudjuk, hogy az S súlypont az AS_1 súlyvonalat negyedeli, az S_1 pont pedig az O_1M_1 egyenest harmadolja, következésképpen S-nek a BCD lapon levő merőleges vetülete az O_1M_1 egyenesszakasz felezőpontja (F_1) (l. az ábrát). Kaptuk tehát, hogy az M, S, O pontoknak a tetraéder *tetszőleges* lapján levő merőleges vetületei egy egyenesbe esnek, mégpedig az S pont vetülete a másik két vetületi pontot összekötő szakasz felezőpontja. Ebből viszont már következik, hogy az M, S, O pontok is egy egyenesbe esnek és S az OM szakasz felezőpontja. (Ehhez elég lenne annyit tudni, hogy az M, S, O pontok vetületei *két* tetraéderlapon egy egyenesbe esnek, ebből már következik, hogy rajta vannak a vetületekben állított merőleges síkok metszésvonalán.) Ez az egyenes éppen a tetraéderlapok Euler-egyeneseiben ezekre a lapokra állított merőleges síkok közös egyenese, más szóval a tetraéder Euler-egyenesének merőleges vetületei a tetraéderlapok Euler-egyenesei.

5. Végül vizsgáljuk a háromszög Feuerbach-körének (az oldalfelezőpontokon átmenő körnek) megfelelőjét a tetraédernél. A Feuerbach-kör fogalmát kétféleképpen is általánosíthatjuk ortocentrikus tetraéderre. Ha figyelembe vesszük, hogy a háromszög oldalfelezőpontjai az oldalak súlypontjai, akkor ezeknek megfeleltethetjük a tetraéder lapsúlypontjait. Így a Feuerbach-kör első általánosításaként adódik a tetraéder lapsúlypontjai által meghatározott gömb. Ezt a gömböt a tetraéder *első Feuerbach-gömbjének* nevezzük. A háromszög oldalfelezőpontjainak másrészt megfeleltethetjük a tetraéder éleinek felezőpontjait is. Így a Feuerbach-kör második általánosításaként adódik az ezek által meghatározott gömb. Ezzel a gömbbel már találkoztunk, és éppen ezt neveztük *második Feuerbach-gömbnek.* Az elnevezést az indokolja, hogy ez a gömb a Feuerbach-kör egyik általánosítása.

Ismeretes, hogy a háromszög Feuerbach-köre a következő tulajdonságokkal rendelkezik: középpontja az Euler-egyenesen a körülírt kör középpontja és a magasságpont által meghatározott szakasz felezőpontja, sugara a körülírt kör sugarának fele, átmegy a magasságvonalak talppontjain, valamint a magasságpontot a háromszög csúcsaival összekötő szakaszok felezőpontjain. A háromszög Feuerbach-körének ezen tulajdonságait a tetraéder első Feuerbach-gömbje örökli, ami mutatja, hogy ez a gömb a Feuerbach-kör közvetlen megfelelője (ez indokolja az első elnevezést is). Bebizonyítjuk ugyanis, hogy az első Feuerbach-gömb a következő tulajdonságokkal rendelkezik: *középpontja az Euler-egyenesen az OM szakasz M-hez közelebbi harmadolópontja, sugara a tetraéder köré írt gömb sugarának harmada,* *átmegy a tetraéder magasságvonalainak talppontjain (a lapok magasságpontjain), végül a magasságpontot a csúcsokkal összekötő szakaszokat a magassághoz közelebbi harmadolópontokban metszi.* Mivel az első Feuerbach-gömb ezen utóbbi nyolc ponton kívül definíció szerint tartalmazza a négy lapsúlypontot is, szokás ezt a gömböt a *tizenkét pont gömbjének* nevezni.

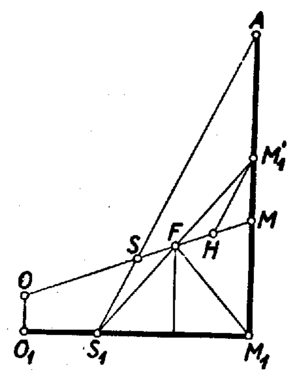
A *bizonyításnál* hasonló módon járhatunk el, mint a háromszög Feuerbach-körére vonatkozó tétel egyik bizonyításánál. Az első Feuerbach-gömb a lapsúlypontok által meghatározott $S_1S_2S_3S_4$ tetraéder köré írt gömb. Mivel az S súlypont a tetraéder súlyvonalait negyedeli, kapjuk, hogy az $S_1S_2S_3S_4$ tetraéder az $ABCD$ tetraédernek az S középpontból történő egyharmadára való zsugorításával és S-re való tükrözésével keletkezik. Ebből következik, hogy a Feuerbach-gömböt az $ABCD$ tetraéder köré írt gömbnek S-ből történő egyharmadára való zsugorításával és S-re való tükrözésével kapjuk, tehát középpontja (F) rajta van az OS egyenesen, mégpedig az egyenesnek S-től számítva O-val ellentétes oldalán, és $SF = \frac{1}{3}OS$. Innen $OS = SM$ felhasználásával adódik, hogy

$$FM = \frac{1}{2}OF,$$

vagyis F az OM szakasz harmadolópontja. Ugyancsak közvetlenül adódik az egyharmados zsugorításból, hogy a Feuerbach-gömb sugara a tetraéder köré írt gömb sugarának harmada. Annak belátására, hogy a gömb tartalmazza a magasságvonalak talppontjait, elegendő igazolni, hogy az egyik, pl. az AM magasságvonal M_1 talppontját tartalmazza, hiszen a magasságvonalak között egyik sem játszik kitüntetett szerepet. Ez következik abból, hogy $FM = \frac{1}{2}OF$ miatt F rajta van az S_1M_1 szakasz felezőpontjában a BCD síkra állított merőlegesen, tehát

$$FS_1 = FM_1.$$

De S_1 rajta van a Feuerbach-gömbön, és így az F középponttól ugyanolyan távolságra levő M_1 pontnak is szükségképpen rajta kell lennie (12. ábra).



12. ábra

Végül a tételben kimondott utolsó tulajdonság igazolásához elegendő ismét az M pontot az egyik, pl. A csúccsal összekötő szakasz M-hez közelebbi M_1' harmadolópontjáról kimutatni, hogy a Feuerbach-gömbön van. Ennek igazolásához jelöljük az SM szakasznak az M-hez közelebbi harmadolópontját H-val. Mivel az AMS háromszögben $M_1'H$ az AM és SM oldalak harmadolópontjait köti össze, kapjuk, hogy

$$M_1'H = \frac{1}{3}AS = SS_1,$$

valamint $M_1'H$ és SS_1 párhuzamosak, tehát $HM_1'SS_1$ parallelogramma, melynél az S_1M_1' átló felezőpontja megegyezik az SH átló F felezőpontjával. Következésképpen

$$FS_1 = FM_1',$$

tehát M_1' rajta van a Feuerbach-gömbön, mégpedig az S_1 ponttal átellenes pont. Ezzel az első Feuerbach-gömb összes kimondott tulajdonságát igazoltuk.

Befejezésül megemlítjük a tetraéder *második Feuerbach-gömbjének* egy tulajdonságát. Mivel a tetraéder bármelyik lapját határoló élek felezőpontjai a második Feuerbach-gömbön vannak, az illető háromszöglap síkja a gömböt a háromszög Feuerbach-körében metszi. Ebből viszont, figyelembe véve a háromszög Feuerbach-körének tulajdonságait, következik, hogy a második Feuerbach-gömb átmegy a tetraéderlapok magasságvonalainak talppontjain, valamint bármelyik lap magasságpontját az illető lap csúcsaival összekötő szakaszok felezőpontjain.