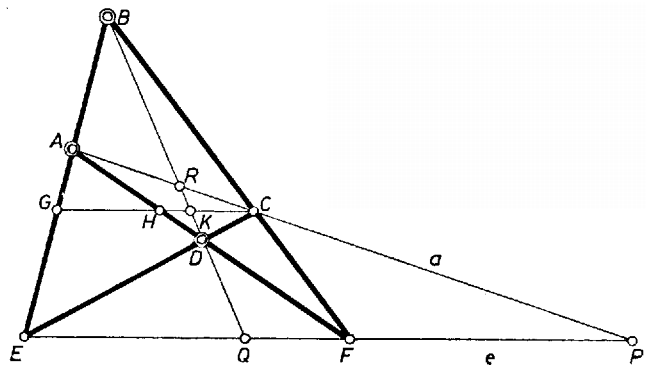
I. megoldás. Feltesszük, hogy a B, D, Q pontok létrejöttek, vagyis felvétel folytán AE nem párhuzamos CF-fel, AF nem párhuzamos CE-vel és az adódott BD egyenes nem párhuzamos e-vel.

Messe a C-n át e-vel párhuzamosan húzott e' egyenes AE-t, AF-et, BD-t rendre a G, H, K pontban (létrejönnek, mert az átmetszett egyenesek a föltevések szerint hajlanak e-hez; 1. ábra).



1. ábra

A bizonyítás során az e, e' egyeneseken létrejött szakaszok alkalmas párjaiból képezett arányokat tekintünk, azt felhasználva, hogy a többi hat egyenes közül az A, B és D pontok mindegyikén $3-3$ megy át, vagyis e és e' három különböző sugárhármast metsz át. A szakaszokon irányításukat is mindig tekintetbe vesszük, tehát $XY = -YX$.

A B-n, majd a D-n átmenő sugárhármas alapján

$$\frac{EQ}{GK} = \frac{QB}{KB} = \frac{QF}{KC}, \quad \text{amiből} \quad \frac{EQ}{QF} = \frac{GK}{KC},$$

és ugyanígy

$$\frac{EQ}{QF} = \frac{CK}{KH}.$$

A bal oldalak egyenlősége alapján az e'-n levő metszéspontokra

$$\frac{GK}{KC} = \frac{CK}{KH}.$$

Mindkét oldalhoz 1-et adva, majd az aránypárt átrendezve

$$\frac{GC}{KC} = \frac{CH}{KH}, \qquad \frac{GC}{CH} = \frac{KC}{KH}. \tag{1}$$

Végül a bal oldali arányt az A-n, a jobb oldalit pedig a D-n átmenő sugárhármas alapján e megfelelő szakaszaival kifejezve

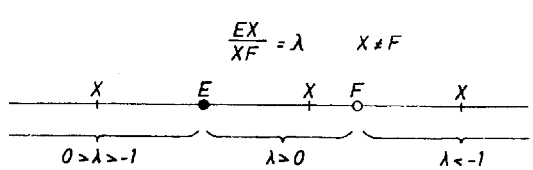
$$\frac{GC}{CH} = \frac{EP}{PF}, \qquad \frac{KC}{KH} = \frac{QE}{QF} = -\frac{EQ}{QF},$$

és ezek szerint (1) második egyenlőségéből

$$\frac{EQ}{QF} = -\frac{EP}{PF}. \tag{2}$$

Megmutatjuk, hogy az EF egyenes bármely, az F-től különböző X pontja egyértelműen meghatározza az $\dfrac{EX}{XF} = \lambda$ arány (ún. osztóviszony) értékét, és megfordítva, az arány értéke (kivéve, ha -1) egyetlen pontot jelöl ki az egyenesen. Ebből már következik, hogy P helyzete (2) útján egyértelműen meghatározza Q helyzetét, tehát ezt a, A és C megválasztása nem befolyásolja.

Amíg ugyanis X az E-től F-ig halad, $\lambda > 0$ és monoton nő, mert számlálója monoton nő, nevezője monoton csökken.



2. ábra

Amíg X az F-en túli meghosszabbításon távolodik, az előjel negatív, mert XF irányítása ellentétes EX-ével, az abszolút érték pedig (2. ábra):

$$|\lambda| = \frac{EX}{FX} = \frac{EF+FX}{FX} = 1 + \frac{EF}{FX} > 1,$$

monoton csökken, tehát λ növekszik -1-ig, magát a -1 értéket viszont nem veszi fel. Végül akkor is $\lambda < 0$, ha X az E-n túli meghosszabbításon távolodik, és ekkor abszolút értéke 0-től 1-ig nő (azaz $0 \geq \lambda > -1$):

$$|\lambda| = \frac{XE}{XF} = \frac{XF-EF}{XF} = 1 - \frac{EF}{XF},$$

hiszen a kivonandó pozitív, nem nagyobb 1-nél, és fogy, ha XF növekszik.

Megfordítva, ha $\lambda \neq -1$, akkor

$$\lambda = \frac{EX}{XF} = \frac{EF+FX}{XF} = -\frac{EF}{FX} - 1\text{-ből}$$

$$FX = -\frac{EF}{1+\lambda} = \frac{FE}{1+\lambda}$$

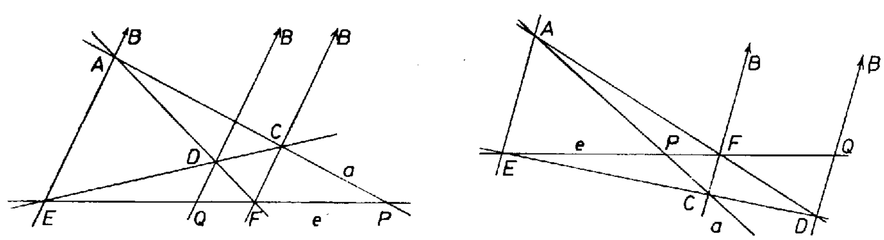
egyértelműen meghatározza X helyzetét.

Ezek szerint az EF, FP és PE szakaszok közti egyenlőség kizárása csak az utóbbi kettő között lényeges; ha ugyanis P az EF felezőpontja, akkor (2) jobb oldala 1 és $EQ/QF = -1$, kizárt érték, tehát Q nem jön létre. (Ekkor, bár ha B, D mindegyike létre is jött, BD párhuzamos e-vel.) Az $EF = FP$ és $EF = PE$ esetekben Q az EF szakasz harmadoló pontjaiban adódik.

Bizonyításunk teljességéhez hozzátartozik annak megmutatása, hogy a fölhasznált sugárhármasok A, B, D közös pontja nincs rajta e'-n. Ezt az 1. ábra szemlélete alapján fogadtuk el. A azért nincs e'-n, mert a hajlik e-hez és A a C-től különböző pont. B sincs rajta, különben csak C-vel azonos lehetne, mert az e-hez és ezért e'-höz is hajló FC egyenes csak egy pontban metszi e'-t, ekkor pedig A is csak B-vel lehetne azonos, mert a (B-t meghatározó) EA egyenes csak egy pontban metszi a-t, tehát A azonos volna C-vel. D-re az utóbbi gondolatmenettel bizonyítunk, a betűk kellő fölcserélésével.

Molnár György (Vác, Sztáron S. Gimn.) és
Szalontai Árpád (Budapest, Berzsenyi D. Gimn.) dolgozatai alapján

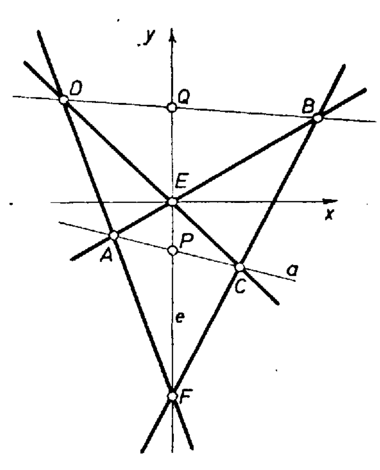
Megjegyzés. A B és D metszéspontok közül legalább az egyik létrejön. Ha ugyanis B nem jön létre, vagyis ha $EA \parallel FC$, akkor D mindenesetre létrejön, mert E, F, C és A egy konvex trapéz csúcsai és ha ebben EF szárként szerepel, akkor D az átlók metszéspontja; ha pedig EF átló, akkor P az átlók metszéspontja, de nem felezi EF-et, ezért az EA, CF alapok különbözők, így pedig a szárak metszik egymást (3. ábra).



3. ábra

Ebben az esetben meg lehet mutatni, hogy EF-nek a D-n átmenő, AE-vel párhuzamos egyenes által e-ből kimetszett Q pontjára áll fenn (2).

II. megoldás. Válasszuk derékszögű koordináta-rendszerünk y tengelyének magát az e egyenest, origójának P-t, és legyen $E(0,\, e)$, $F(0,\, f)$, ahol $e \neq f$ és $ef \neq 0$ (4. ábra).



4. ábra

Legyen továbbá a egyenlete $y=mx$ (minden m-re különböző e-től), és $A(a,\, ma)$, $C(c,\, mc)$, ahol $a\neq c$ és $ac\neq 0$. (Nem fog félreértést okozni e és a kétféle jelentése.)

Az EA és FC egyenes egyenlete:

(3) $$y-e=\frac{ma-e}{a}x,$$

(4) $$y-f=\frac{mc-f}{c}x,$$

ezek metszéspontjaként B koordinátái:

(5) $$B\left(\frac{ac(f-e)}{af-ce},\ \frac{mac(f-e)+ef(a-c)}{af-ce}\right),$$

hacsak $af\neq ce$ $\left(\text{egyenlőségük } \frac{e}{f}=\frac{a}{c}=\frac{ma}{mc} \text{ alakban azt jelentené, hogy } EA\parallel FC\right)$.

(3)-ban, (4)-ben és (5)-ben minden egyes e helyére f-et és f helyére e-t írva, FA, EC egyenletét, ill. D koordinátáit kapjuk:

(5') $$D\left(\frac{ac(e-f)}{ae-cf},\ \frac{mac(e-f)+fe(a-c)}{ae-cf}\right),$$

hacsak $ae\neq cf$ (FA nem párhuzamos EC-vel).

Így a BD egyenes egyenlete, majd ebből Q ordinátája, $x=0$ helyettesítéssel

$$y-y_b=\frac{y_D-y_B}{x_D-x_B}(x-x_B),$$

$$y_Q=y_B-\frac{x_B(y_D-y_B)}{x_D-x_B}=\frac{x_Dy_B-x_By_D}{x_D-x_B}=$$

(6) $$=\frac{ky_B-y_D}{k-1},\qquad \text{ahol}\qquad k=\frac{x_D}{x_B}=\frac{ce-af}{ae-cf}$$

(az osztás megengedett volt, hiszen a fönti kizárások alapján $x_B\neq 0$), és $k\neq 1$, ugyanis $k=1$ föltevése $(c-a)(e+f)=0$-ra, $e=-f$-re vezetne, azaz $EP=PF$-re, amit kizártunk.

Végül (6)-ot kiszámítva

$$y_Q=\frac{2ef}{e+f},$$

ami valóban független m, a, c mindegyikétől, és benne, mint legutóbb láttuk, $e+f\neq 0$.

Papp Zoltán (Debrecen, Fazekas M. Gimn.)

Megjegyzések. 1. Eredményünkből

$$\frac{1}{y_Q}=\frac{e+f}{2ef}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{e}+\frac{1}{f}\right),\quad \text{azaz}$$

$$\frac{1}{PQ}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{PE}+\frac{1}{PF}\right),$$

PQ a PE, PF szakaszok harmonikus közepe, eszerint feladatunk újabb[1] eljárást adott két szakasz harmonikus középének szerkesztésére – éspedig *egyetlen egyenes vonalzó felhasználásával* –, és akkor is, ha a szakaszok ellentétes irányításúak (de abszolút értékben különbözők).

2. Ebben a bizonyításban így adódik, hogy B és D közül legalább az egyik létrejön: $ae=cf$ és $ce=af$ egyidejű föltevéséből szorzással $ace^2=acf^2$, $e=-f$, amit mint már láttuk, kizárt.

Ha pedig B nem jön létre, azaz $af=ce$, akkor az AE egyenessel párhuzamos és D-n átmenő egyenesnek az y tengellyel való metszéspontjához tartozó ordináta (nem sok számítással)

$$y=y_D+\frac{ma-e}{e}(-x_D)=\frac{2ef}{e+f},$$

amint az I. megoldáshoz fűzött megjegyzés végén állítottuk.

[1] Lásd az 1169. gyakorlatot, K. M. L. 37 (1968) 70. o., valamint a hozzá kapcsolódó cikket: *Tusnády Gábor:* Az 1169. gyakorlat megoldása vektorok segítségével, K. M. L. 37 (1968) 49–51. o.

3. Többen fölismerték, hogy a feladat állítása egy, a projektív geometria[2] elemeiben tárgyalt alapvető tétel: az AB, BC, CD, DA egyenesekkel meghatározott, ún. *teljes négyoldal* (amelynek még E és F is szögpontjai) *átlóján levő két szögpont és két átlós pont harmonikusan választja szét egymást,* amin ezt értik:

$$\left(\frac{EQ}{QF}\right):\left(\frac{EP}{PF}\right)=-1.$$

(A teljes négyoldal 3 átlója: EF, BD és AC, az utóbbi kettőnek R metszéspontja is átlós pont.)

[2]Lásd a következő Középiskolai Szakköri Füzetekben (kiadta a Tankönyvkiadó Budapesten): *Vigassy Lajos:* Projektív geometria, 1970; *Vigassy Lajos:* Geometriai transzformációk, 1963.