Azonos átalakításokkal

$$y=\operatorname{tg}x\left(1-\frac{1}{\cos\ 2x}\right)=\ \operatorname{tg}x\frac{(1-2\ \sin^2 x)-1}{\cos^2 x-\sin^2 x}=\frac{2\ \sin^3 x}{\cos\ x(\sin^2 x-\cos^2\ x)}=$$
$$\frac{2}{\operatorname{ctg}x-\ \operatorname{ctg}^3 x},$$

és mivel az előírt intervallumban az eredeti alak szerint $y>2\ \operatorname{tg}x>2$, az eredeti kérdés helyett kereshetjük a

$$\frac{2}{y}=\operatorname{ctg}x-\operatorname{ctg}^3 x=\operatorname{ctg}x(1-\operatorname{ctg}^2 x)\qquad(<1)$$

függvény maximumát. Ez ugyanazon x mellett válik maximálissá, mint a

$$2\left(\frac{2}{y}\right)^2=2\ \operatorname{ctg}^2 x\left(1-\operatorname{ctg}^2 x\right)^2=2u^2(1-u^2)(1-u^2)$$

függvény, ahol $u=\operatorname{ctg}x<1$.

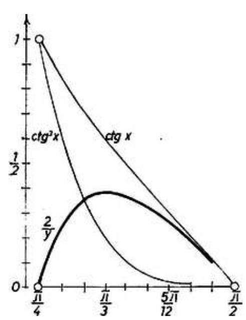
Így a jobb oldal tényezői pozitívok, és összegük 2, állandó, tehát a függvény a pozitív számok számtani és mértani közepe közti ismert egyenlőtlenség szerint akkor veszi fel legnagyobb értékét, ha tényezői egyenlők:

$$2u^2=1-u^2,\qquad u=\operatorname{ctg}x=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Ekkor pedig

$$\left(\frac{2}{y}\right)_{\max}=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3\sqrt{3}},\qquad y_{\min}=3\sqrt{3}.$$

Ezt az értéket a függvény az $x=60^\circ$ helyen veszi fel.



Megjegyzések. **1.** Az $f(u)=\dfrac{2}{y}=u-u^3$ függvény szélső értékét deriválással is meghatározhatjuk.

$$f'(u)=1-3u^2,$$

tehát $f'(u)=0$ az $u=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ helyeken áll be. Feladatunk feltételei szerint $0<u<1$, emiatt csak az $u_0=1/\sqrt{3}$ helyet kell megvizsgálnunk. Itt $f'(u)$ csökkenve válik 0-vá, ugyanis az ő deriváltjának – az eredeti $f(u)$ ún. *második deriváltjának* –

$$\left(f'(u)\right)'=f''(u)=-6u$$

-nak az értéke a kérdéses u_0 helyen $-2\sqrt{3}<0$, tehát az u_0 hely előtt $f'(u)>0$, utána $f'(u)<0$, így pedig az $f(u)$ függvénynek maximuma, $y=2/f(u)$-nak minimuma van.

2. Négyzetre emelés nélkül is célhoz érhetünk, ha $2/y$-t elsőfokú tényezőkre bontjuk, majd megszorozzuk ezeket pozitív állandókkal, amelyeket úgy választunk, hogy az így keletkező tényezők összege u-tól független legyen és legyen egy u érték, amelyre mind a 3 tényező egyenlő. Az első feltétel teljesül 1, α, $1+\alpha$ alakú tényezők választása mellett:

$$\frac{2\alpha(1+\alpha)}{y}=u\cdot\left[\alpha(1+u)\right]\cdot\left[(1+\alpha)(1-u)\right]\leqq$$
$$\leqq\left(\frac{u+\alpha(1+u)+(1+\alpha)(1-u)}{3}\right)^3=\frac{(1+2\alpha)^3}{27}.$$

Emellett megoldhatónak kell lennie az

$$u = \alpha(1 + u),$$
$$u = (1 + \alpha)(1 - u)$$

egyenletrendszernek. Innen u-t kiküszöbölve a $2\alpha^2 + 2\alpha - 1 = 0$ egyenlet gyöke $\alpha = (\sqrt{3} - 1)/2$, amivel $u = 1/\sqrt{3}$, mint a fenti megoldásban.