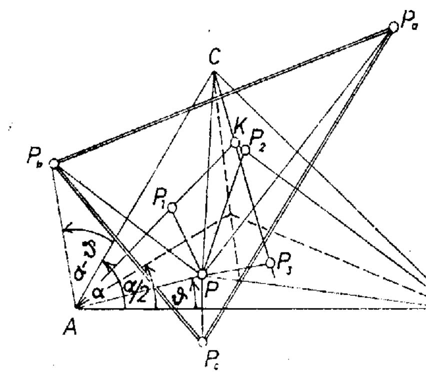
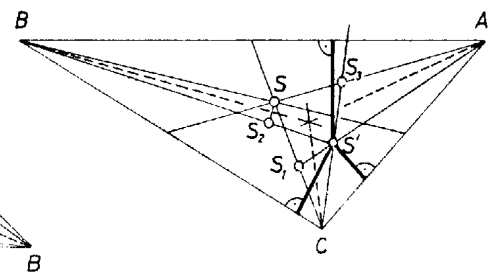
I. megoldás. *a)* Jelöljük P tükörképét a háromszög A-nál, B-nél, C-nél levő szögének felezőjére sorra P_1-gyel, P_2-vel, P_3-mal. A kívánt AP_1, BP_2, CP_3 tükörképeket két-két, az A, B, ill. C pont körüli elfordítással állítjuk elő. Pozitívnak azt a forgási irányt vesszük, amely az AB félegyenest $180°$-nál kisebb elfordulással viszi át AC-be.

Legyen $BAC\sphericalangle = \alpha$ és $BAP\sphericalangle = \vartheta$ (1. ábra). Ekkor AP-t a BAC szög felezőjébe $\alpha/2 - \vartheta$ nagyságú elfordulás viszi át, az előírt AP_1 helyzetbe pedig 2-szer ekkora elfordulás: $\alpha - 2\vartheta$. AP-nek első lépésül -2ϑ-val való elfordítása az AB-n való tükrözését jelenti az AP_c helyzetbe, ahol P_c a P tükörképe AB-re, második lépésül ezt α-val fordítjuk el. – Ugyanezt a véghelyzetet kapjuk, ha AB-t AC-vel felcserélve, AP-t AC-re tükrözzük az AP_b helyzetbe, ami $2(\alpha-\vartheta)$-val történő elfordítás, majd a képet $-\alpha$-val fordítjuk el. Ezek szerint az AP_1 félegyenes felezi a P_cAP_b szöget[1], pontosabban az AP_c-ből AP_b-be vivő elfordulást. És mivel $AP_c = AP = AP_b$, ezt is mondhatjuk: AP_1 a P_cP_b szakasz felező merőlegese.

Ugyanígy, P tükörképét BC-re P_a-val jelölve BP_2 a P_aP_c szakasz felező merőlegese, CP_3 pedig a P_aP_b szakaszé, vagyis a vizsgálandó AP_1, BP_2, CP_3 egyenesek a $P_aP_bP_c$ háromszög oldalfelező merőlegesei, tehát ennek a háromszögnek K középpontjában metszik egymást – hacsak a mondott háromszög nem fajult el egyenesszakasszá. Ezt kellett bizonyítanunk; tehát az állításbeli P' pont K.



1. ábra



2. ábra

b) P-ként az ABC háromszög M magasságpontját választva P'-ként – a fenti K helyén – az ABC háromszög köré írt k kör O középpontját kapjuk, hiszen ekkor – mint jól ismert – a P_a, P_b, P_c tükörképek k-n adódnak. Minthogy pedig egy tükörkép egyenesnek ugyanazon tengelyre vett tükörképe az eredeti egyenes, O-t véve P-ként, P'-ként M-et kapjuk, vagyis a háromszög ezen két nevezetes pontját a feladatban vizsgált eljárás egymásba viszi át.

P-ként az S súlypontot választva, megmutatjuk a tétel szerint kapott $P' = S'$ pont következő tulajdonságát: S' az a pontja a háromszög síkjának, amelynek az egymás utáni oldalaktól mért távolságai arányosak a megfelelő oldalak hosszával. Ehhez belátjuk, hogy az S pont $BAC\sphericalangle$ szögfelezőjére vett S_1 tükörképének az AB, AC oldalaktól mért d_c, d_b távolságaira fennáll $d_c : d_b = c : b$, és természetesen ugyanez az aránya az AS_1 egyenes minden S^* pontja távolságainak a mondott oldalaktól. Ebből már következik, hogy AS_1-nek az analóg BS_2-vel való S' metszéspontjára $d_c' : d_b' = c : b$ és $d_a' : d_c' = a : c$, tehát $d_a' : d_b' : d_c' = a : b : c$.

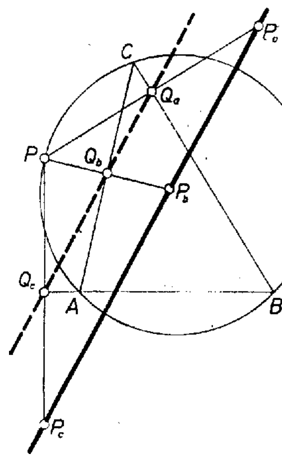
A súlypont ismert harmadoló tulajdonsága miatt S-nek az AB, AC oldaltól mért távolsága az m_c, ill. m_b magasság 1/3 részével egyenlő (2. ábra), így S_1 re nézve $d_c = m_b/3$, $d_b = m_c/3$, és mivel még $m_b = 2\ t/b$, $m_c = 2\ t/c$, ahol t a háromszög területe, $d_c : d_b = 2t/3b : 2t/3c = c : b$

Bajmóczy Ervin (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., II. o. t.)
Máté András (Budapest, I. István Gimn., I. o. t.)

Megjegyzés. Ha ismerjük a következő tételt, akkor megadhatjuk, mely P pontok esetén jön létre P'. Egy P pontnak az ABC (nem elfajult) háromszög oldalegyenesein levő Q_a, Q_b, Q_c vetületei akkor és csak akkor vannak egy egyenesen, ha P a háromszög köré írt k kör kerületén van (az egyenes a háromszöghöz és a P ponthoz tartozó Simson-féle – más névvel Wallace-féle – egyenes)[2]. Mármost P_a, P_b, P_c a Q_a, Q_b, Q_c ponthármas 2-szeresre nagyított képe P-ből mint középpontból, tehát a $P_aP_bP_c$ háromszög akkor és csak akkor fajul el egyenessé – és így P' nem jön létre –, ha P a k-n van (3. ábra).

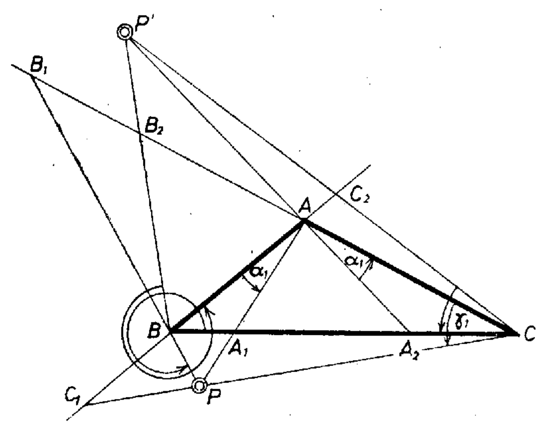
[1] Az 1. ábrán az AP_c egyenesdarab pótlandó.

[2] A feltétel elegendő volta bizonyítását speciális esetre lásd pl. *Faragó László-Forgó Péterné:* Geometriai szerkesztések, 2. kiadás (Középiskolai Szakköri Füzetek), Tankönyvkiadó, Budapest, 1954, 103. o.



3. ábra

II. megoldás. Messe a BC, CA, AB oldalt a PA, PB, PC egyenes rendre az A_1, B_1, C_1 pontban (4. ábra), a szóban forgó tükörképük pedig rendre az A_2, B_2, C_2 pontban.



4. ábra

Egyelőre feltesszük, hogy mindegyik metszéspont létrejött. Ekkor *Ceva tétele*[3] szerint fennáll

$$\frac{AC_1 \cdot BA_1 \cdot CB_1}{C_1B \cdot A_1C \cdot B_1A} = 1, \tag{1}$$

és azt kell bebizonyítanunk, hogy teljesül a következő is:

$$\frac{AC_2 \cdot BA_2 \cdot CB_2}{C_2B \cdot A_2C \cdot B_2A} = 1. \tag{2}$$

Legyen az ABC háromszög körüljárása pozitív (vagyis pl. AB-t AC-be, 180°-nál kisebb szöggel, pozitív forgás viszi át), és a BAP, CBP, ACP forgásszög mértékszáma rendre α_1, β_1, γ_1, ekkor szerkesztésnél fogva ugyanennyi (esetleg 180°-kal több vagy kevesebb) a BAA_1, CBB_1, ACC_1 szög mértékszáma, úgyszintén az A_2AC, B_2BA, C_2CB szög mértékszáma is. Az AA_1B és AA_1C háromszögekből a sinustétel alapján

$$\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{BA \sin\alpha_1}{\sin(\beta+\alpha_1)} : \frac{AC \sin(\alpha-\alpha_1)}{\sin(\beta+\alpha_1)} = \frac{BA \sin\alpha_1}{AC \sin(\alpha-\alpha_1)},$$

hasonlóan a BB_1C, BB_1A, valamint CC_1A, CC_1B háromszögpárokból

$$\frac{CB_1}{B_1A} = \frac{CB \sin\beta_1}{BA \sin(\beta-\beta_1)}, \qquad \frac{AC_1}{C_1B} = \frac{AC \sin\gamma_1}{CB \sin(\gamma-\gamma_1)}, \tag{3}$$

és ezekkel az (1) feltevés így alakul

$$\frac{\sin\alpha_1 \sin\beta_1 \sin\gamma_1}{\sin(\alpha-\alpha_1)\sin(\beta-\beta_1)\sin(\gamma-\gamma_1)} = 1. \tag{4}$$

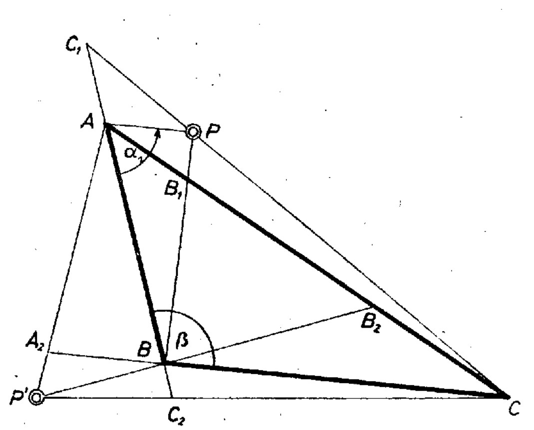
[3] Lásd az 1437. feladathoz fűzött megjegyzést, K. M. L. 33 (1966) 207. o., legutóbb felhasználva az 1119. gyakorlatban, K. M. L. 36 (1968) 158. o. (1) megfordítva is érvényes: ha (1) teljesül, akkor AA_1, BB_1, CC_1 egy ponton mennek át.

Másrészt az AA_2B, AA_2C, valamint BB_2C, BB_2A és CC_2A, CC_2B háromszögpárokból

$$\frac{BA_2}{A_2C} = \frac{BA\sin(\alpha-\alpha_1)}{AC\sin\alpha_1}, \qquad \frac{CB_2}{B_2A} = \frac{CB\sin(\beta-\beta_1)}{BA\sin\beta_1},$$
$$\frac{AC_2}{C_2B} = \frac{AC\sin(\gamma-\gamma_1)}{CB\sin\gamma_1},$$

ezek szorzata pedig (4) figyelembevételével (2)-t adja, amit bizonyítani akartunk.

Ha a PA, PB, PC egyenesek, ill. szóban forgó tükörképük közül egy vagy több párhuzamos a háromszög megfelelő oldalával, speciális esetek adódnak, ezekben a bizonyítás egyszerűbben alakul. Példaként csak a $PA||BC$ esetet vesszük (PB, PC ne legyen párhuzamos oldallal, és A_2, B_2, C_2 is jöjjenek létre, 5. ábra).



5. ábra

Ekkor A, B, C, P egy trapéz csúcsai, és hasonló háromszögekből

$$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{AP}{BC}, \qquad \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{BC}{AP},$$

tehát szorzatuk 1. Másrészt, ha P az AB egyenesnek ugyanazon az oldalán van, mint C, akkor $\alpha_1 = 180° - \beta$, így a (3) jobb oldalain álló kifejezések szorzatát megszorozva

$$\frac{BA\sin\beta}{AC\sin\gamma}$$

-val, aminek értéke 1, és így is írható:

$$\frac{BA\sin(180°-\beta)}{AC\sin(\alpha+\beta-180°)} = \frac{BA\sin\alpha_1}{AC\sin(\alpha-\alpha_1)},$$

ismét megkapjuk (4)-et.