I. Az a oldalú szabályos háromszög alapjára n db r sugarú kört írva az 1*c)* ábra szerint

$$a = 2 \cdot r\sqrt{3} + (n-1) \cdot 2r,$$

$$r = \frac{a}{2(n-1+\sqrt{3})},$$

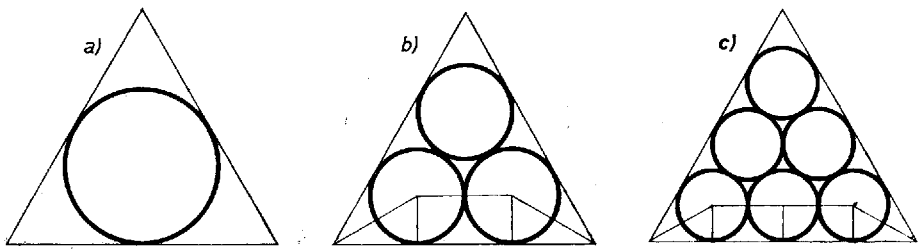
és a sorok száma ugyancsak n. Ezért a körök együttes száma $1+2+\ldots+n = n(n+1)/2$, a lefedett terület

$$\frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{\pi a^2}{4(n-1+\sqrt{3})^2},$$

és ennek aránya a háromszög $a^2\sqrt{3}/4$ területéhez

$$q_n = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{n(n+1)}{(n-1+\sqrt{3})^2} \left(= \frac{50\pi}{\sqrt{3}} \cdot \frac{n(n+1)}{(n+\sqrt{3}-1)^2}\% \right). \tag{1}$$

Ez $n = 1, 2$ és 3 esetében, egészre kerekítve rendre 60%, 73%, 79%.



1. ábra

II. Eredményünk így alakítható:

$$q_n = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \left(1 - \frac{(2\sqrt{3}-3)n + (4-2\sqrt{3})}{(n+\sqrt{3}-1)^2} \right).$$

Itt a zárójelbeli kivonandó nagy n-ekre várhatóan kevéssel különbözik a $(2\sqrt{3}-3)/n$ törttől – ami úgy keletkezik, hogy a számlálóban is, a nevezőben is csak azt a tagot tartjuk meg, amely n-et a legmagasabb hatványán tartalmazza. Egyszerű számítás mutatja, hogy a módosított tört és az eredeti tört különbsége nagyobb, mint

$$\frac{14-8\sqrt{3}}{(n+\sqrt{3}-1)^2} > 0,$$

tehát

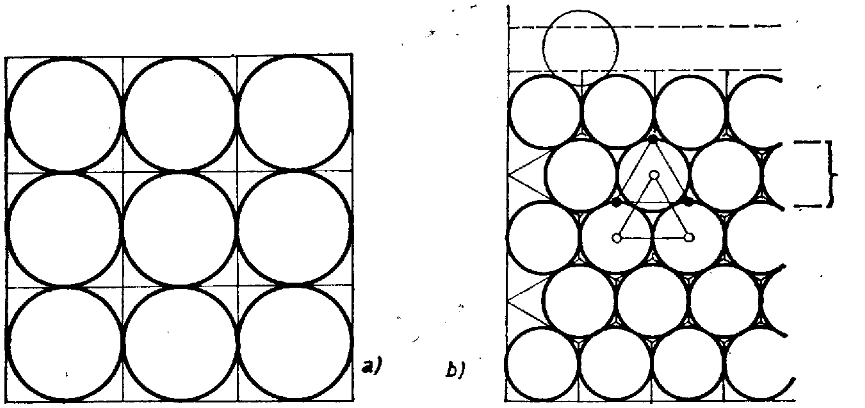
$$q_n > \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \left(1 - \frac{2\sqrt{3}-3}{n} \right).$$

Azt kell biztosítanunk, hogy a jobb oldal nagyobb legyen 0,9-nél:

$$n > \frac{\pi(2\sqrt{3}-3)}{\pi - 2 \cdot 0{,}9\sqrt{3}} \approx 61,$$

a körök tehát biztosan lefedik a háromszög területének 90%-át, ha egy oldalon legalább 62-t veszünk belőlük. (Természetesen a $\pi = 3{,}1416$ közelítő értéket használtuk, mert $1{,}8\sqrt{3} = \sqrt{9{,}72} \approx 3{,}1177 \approx 3{,}12$ miatt a 3,14-es közelítő értékkel a nevezőben csak egy értékes jegyünk lenne.)

III. A négyzetbe írt körök esetében rajzoljuk meg az érintkező körök közös érintőjét a kör legközelebbi érintőjével való metszéspontig, ill. a négyzet kerületéig. Így a 2*a)* ábra minden köre körül ismét négyzet jön létre, a 2*b)* ábra körei körül viszont a körülírt szabályos hatszögük, amennyiben a kör 6 másik körrel érintkezik, különben pedig egy ötszög vagy trapéz.



2. ábra

A $2a)$ ábra esetében a fedési arány bármely n esetében ugyanannyi, ti.

$$n^2\left(\frac{b}{2n}\right)^2\pi : b^2 = \frac{\pi}{4} = 0{,}785$$

(b a négyzet oldala). Így 0,9-es fedés nem érhető el.

A $2b)$ ábra esetében $n = 2$-re és 3-ra az arány kisebb ennél, hiszen ekkor a $2a)$ ábra szerinti 4, ill. 9 kör helyett csak 3-at, ill. 8-at tudunk berajzolni. Ennek ellenére n-et elég nagyra választva a 0,9-es fedés – mint majd látjuk – túlléphető. Ehhez előrebocsátjuk a következőket.

n növelésével várható, hogy n-nél több sor rétegezhető egymás fölé, így ellensúlyozódik az a veszteség, hogy a páros sorszámú sorok 1-gyel kevesebb kört tartalmaznak.

Másrészt egy r sugarú kör a köréje írt szabályos hatszög területéből többet fed le, mint 0,9 rész, hiszen a hatszög oldala $c = 2r/\sqrt{3}$, területe $3\sqrt{3}c^2/2 = 2\sqrt{3}r^2$, és πr^2-et ezzel osztva

$$\frac{\pi}{2\sqrt{3}} = 0{,}9069.$$

Végül a 6-nál kevesebb körrel érintkező körök az érintődarabok által köréjük írt sokszög területéből ennél ugyan kisebb hányadrészt fednek le, várható viszont, hogy n növelésével a négyzet kerülete közelében lefedetlenül maradt terület csökken. (Hasonlóan, mint az 1. ábra, szerinti berajzolás esetében, hiszen a $2b$ ábrán a körök kölcsönös helyzete az 1. ábra szerinti.)

Rátérve a számításra, írjunk az alapra n kört és legyen a körökből álló vízszintes sorok száma N. Az alsó sorbeli körök legmagasabb pontja $2r = b/n$ magasságban van a négyzet alapja fölött, és ez a magasság sorról sorra $r\sqrt{3}$-mal lesz több, ti. ennyi a 3, páronként érintkező kör középpontjai által meghatározott háromszög magassága. Így az alsó sor fölé annyi további sor rétegezhető, amennyi a $(b-2r)/\sqrt{3}$ hányados egész része:

$$N - 1 = \left[\frac{b-2r}{r\sqrt{3}}\right] = \left[\frac{2(n-1)}{\sqrt{3}}\right].$$

Aszerint, hogy N páros, ill. páratlan, a berajzolt körök száma

$$K_n = \frac{N}{2}(2n-1), \quad \text{ill.} \quad \frac{N-1}{2}(2n-1) + n,$$

hiszen két szomszédos sorban $n + (n-1)$ kör van. Ebből a lefedett terület kiszámítható.

Vegyük példának $n = 7$ és $n = 8$ esetét.

$$N_7 - 1 = \left[\frac{2\cdot 6}{\sqrt{3}}\right] = [4\sqrt{3}] = [6{,}928] = 6,$$

$$N_8 - 1 = \left[\frac{14}{\sqrt{3}}\right] = [8{,}082] = 8,$$

vagyis a sorok száma 7, ill. 9 (az áttérésben 2-vel nőtt), közülük a rövidebbek száma 3, ill. 4, igy a körök száma

$$K_7 = 7\cdot 7 - 3 = 46, \quad \text{ill.} \quad K_8 = 9\cdot 8 - 4 = 68,$$

és a lefedési arány

$$\frac{46}{49}\cdot\frac{\pi}{4} = 0{,}737, \quad \text{ill.} \quad \frac{68}{64}\cdot\frac{\pi}{4} = 0{,}835.$$

A növekedést az is magyarázza, hogy $n=7$ esetében a felső sor fölött olyan sáv maradt üresen, amelynek szélessége a körátmérőnek 0,928-szerese, amennyit az egész rész képezésekor elhagytunk, viszont $n=8$ esetében ez az arány csak 0,082.

Jelöljük μ-vel azoknak a soroknak a számát, amelyekben csak $n-1$ kör van, ezt n-nel becsüljük:

$$\mu \le \frac{N+1}{2} \le \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}(n-1)+2}{2} < (n-1)+1 = n.$$

Ezt felhasználva

$$q_n = \frac{(n\cdot N-\mu)\pi r^2}{b^2} > (nN-n)\pi\left(\frac{r}{b}\right)^2 > \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}(n-1)-1}{n}\cdot\frac{\pi}{4} = \left(1-\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{n}\right)\cdot\frac{\pi}{2\sqrt{3}},$$

ami nagyobb 0,9-nél, ha

$$n > \frac{\pi\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\pi-2\cdot 0{,}9-\sqrt{3}} \approx 246.$$

Pl. $n=250$ esetén $N-1=\left[166\sqrt{3}\right]=[287{,}52]=287$, $K_n=71\,928$, $q_n=0{,}9038$.

Donga György (Budapest, Berzsenyi D. Gimn.)
dolgozatának felhasználásával, számos kiegészítéssel

Megjegyzések. 1. A háromszögbe írt körök esetében n növekedésével q_n – mint arra fent csak céloztunk – valóban monoton nő, ugyanis

$$\frac{q_{n+1}}{q_n} = \frac{(n+2)(n+\sqrt{3}-1)^2}{(n+\sqrt{3})^2 n} = \frac{n^3+2\sqrt{3}n^2+2\sqrt{3}n+4(2-\sqrt{3})}{n^3+2\sqrt{3}n^2+3n} =$$
$$= 1+\frac{(2\sqrt{3}-3)n+4(2-\sqrt{3})}{(n+\sqrt{3})^2 n} > 1,$$

hiszen a számlálóbeli együtthatók pozitívok.

2. A háromszögbe írt körök esetében a becsléssel talált $n \ge 62$ eredményt megkaphatjuk a $q_n=0{,}9$ (másodfokúra vezető) egyenlet megoldásával is, pozitív gyökét ($\approx 60{,}5$) a legközelebbi egész számra fölkerekítve. Valóban, nagyobb pontosságú számítással $q_{60}=0{,}89992$, $q_{61}=0{,}90003$.

3. A négyzetbe írt körök esetére megmutatjuk, hogy n-ről $2n$-re áttérve a fedettségi arány csak nőhet.

$r=b/n$ esetén a második sorbeli $n-1$ kör legfelső pontjának magassága

$$r(2+\sqrt{3}) = \frac{2+\sqrt{3}}{2n}\cdot b = \frac{b}{n}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{b}{n}1{,}866,$$

viszont $r=b/2n$ esetén a 4. sorbeli körök legfelső pontja alacsonyabban van:

$$\frac{r}{2}(2+3\sqrt{3}) = \frac{b}{n}\cdot 1{,}799,$$

és az eddig elhelyezett körök száma 2n-1-ről több mint a 4-szeresére emelkedett: $2(2n+2n-1)=8n-2$-re.

Utóbbi megállapításunk két, ill. 4 szomszédos magasabb sor esetére is érvényes, de itt a 2, ill. 4 sor szélessége (alsó és felső pontjaik egyenesének távolsága) ugyanannyi.

Végül a kétféle kitöltést 1, ill. 2 soros sávonként folytatva előfordulhat, hogy b/n sugarú körből már nem fér be 1 sor, de $b/2n$ sugarúból befér.

Ezek szerint, ha egy n érték esetén a fedés több, mint 90%, akkor mondhatjuk, hogy tetszés szerinti számú olyan n érték van.