Az alábbiakban közöljük a haladók (II. osztályosok) versenyén kitűzött feladatok megoldásait.

I. forduló

1. feladat. *Egy vonat elindul* A*-ból és egyenletes mozgással halad* B *felé.* 11 *perccel később elindul* B*-ből egy vonat ugyanazon az útvonalon, ugyancsak állandó sebességgel* A *felé. A találkozástól számítva* 20*, ill.* 45 *perc múlva érnek a vonatok* B*-be, ill.* A*-ba. Milyen arányban osztja a* T *találkozási pont az* AB *távolságot?*

I. megoldás: Ha az A-ból induló vonat sebessége v_1 a B-ből indulóé v_2, akkor a találkozás utánra vonatkozó adatokból

$$20v_1 = TB, \qquad 45v_2 = TA, \quad \text{amibő} \quad \frac{AT}{TB} = \frac{9}{4}\cdot\frac{v_2}{v_1}.$$

Viszont a T-ig megtett utakhoz szükséges időket számítva ki, ezek különbsége 11 perc, vagyis

$$\frac{AT}{v_1} - \frac{TB}{v_2} = 11.$$

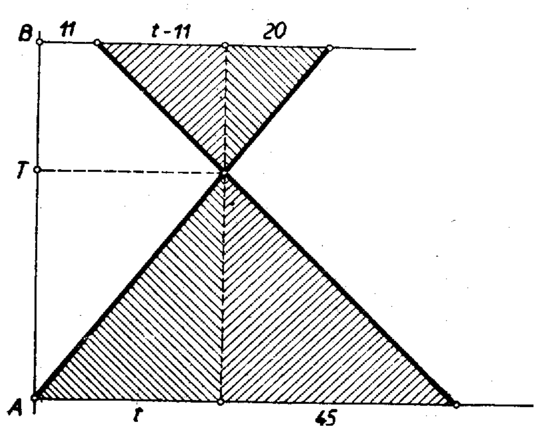
Ide TA és TB imént kapott értékét behelyettesítve, és a $\frac{v_2}{v_1} = u$ értékkel végig szorozva, utóbbira a

$$45u^2 - 11u - 20 = 0$$

egyenletet kapjuk. Innen, csak a pozitív gyököt véve figyelembe,

$$u = \frac{4}{5}, \quad \text{és így} \quad \frac{AT}{TB} = \frac{9}{4}u = \frac{9}{5}.$$

II. megoldás: Legkönnyebb arra az időre egyenletet felírni, amely valamelyik vonatnak indulástól a T pontba jutásig vagy az egész út megtételéhez szükséges. Ebben még a szemléletet is segítségül vehetjük, mert közelebbi adatok nélkül is vázolhatjuk a viszonyokat szemléltető grafikon szerkezetét (lásd az 1. ábrát, amelyen vízszintesen az időt, függőlegesen a megtett utat ábrázoltuk).



1. ábra

Ha pl. az A-ból induló vonat T-be érkezéséhez szükséges t időt akarjuk kiszámítani, akkor az ábrán azonosan sraffozott hasonló háromszögekből

$$\frac{t}{20} = \frac{45}{t-11}.$$

Az egyenlet mindkét oldalán éppen (a kiszámítható arány áll.) Átrendezve (ha $t \neq 11$)

$$t^2 - 11t - 900 = 0,$$

és az egyenlet pozitív gyöke

$$t = \frac{11+61}{2} = 36,$$

a keresett arány pedig

$$\frac{AT}{TB} = \frac{t}{20} = \frac{9}{5}.$$

A fent említett 3 további időtartam bármelyikéből indulva ki teljesen hasonlóan járhatunk el.

III. megoldás: Közvetlenül a keresett $x = AT/BT$ arányra is állíthatunk fel egyenletet. Az A-ból induló vonat ugyanis $20x$ perc alatt érkezik A-ból T-be, a B-ből induló pedig $45/x$ perc alatt B-ből T-be. A feladat első része szerint pedig

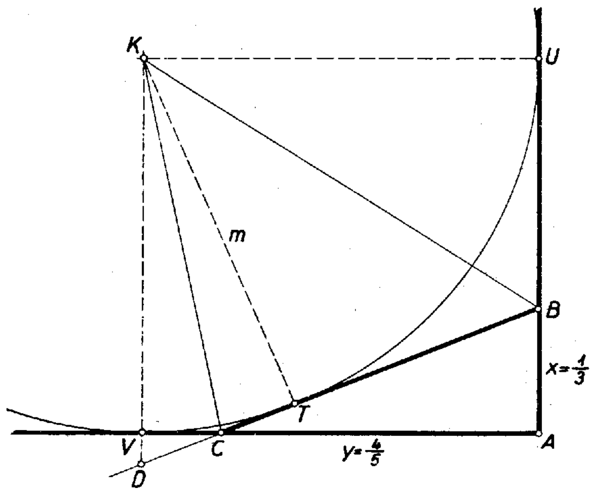
$$20x - \frac{45}{x} = 11 \quad \text{azaz} \quad 20x^2 - 11x - 45 = 0.$$

Innen, csak a pozitív gyököt véve tekintetbe

$$x = \frac{11 + 61}{40} = \frac{9}{5}.$$

2. feladat. *Egy* a *oldalú négyzet két szomszédos oldalát* 6, *ill.* 10 *egyenlő részre osztjuk, majd összekötjük a közös csúcstól* $\frac{3}{6}$ *távolságban levő első osztáspontot a szomszédos oldalnak a közös csúcstól számított negyedik osztáspontjával. Bizonyítsuk be, hogy az így nyert összekötő egyenes érinti a négyzetbe írható kört.*

I. megoldás: Válasszuk a négyzet oldalának felét mértékegységül. Legyenek a négyzet A csúcsából induló oldalakon a beírt kör érintési pontjai U, V, a kör középpontja K, az AU szakaszon $AB = \frac{1}{3}$, az AV-n $AC = \frac{4}{5}$ (2. ábra).



2. ábra

Azt kell megmutatni, hogy BC távolsága K-tól 1, amit úgy is fogalmazhatunk, hogy a BCK háromszög K-ból húzott $KT = m$ magassága egységnyi. Ezt a magasságot a háromszög területének meghatározásán keresztül számíthatjuk ki könnyen. Az ABC, BKU, CKV háromszögek területei rendre

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2}{5}, \qquad \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}, \qquad \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{10},$$

és így a BCK háromszög t területére

$$t = 1 - \frac{2}{15} - \frac{1}{3} - \frac{1}{10} = \frac{13}{30}.$$

Pythagoras tételével kiszámítva a BC oldalt

$$BC^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{25 + 144}{9 \cdot 25} = \left(\frac{13}{15}\right)^2, \quad \text{azaz} \quad BC = \frac{13}{15}.$$

Így

$$m = \frac{2t}{BC} = 1.$$

És ez volt a bizonyítandó.

II. megoldás: Az előző megoldás jelöléseit használjuk. Legyen KV és BC metszéspontja D (2. ábra). Kiszámíthatjuk KT-t hasonló háromszögekből is. Az ABC és TDK háromszögek hasonlók, így

$$\frac{KT}{KD} = \frac{C_A}{C_B}. \tag{1}$$

BC-re, mint az előző megoldásban, Pythagoras tétele segítségével $13/15$ adódik. Mivel az ABC és VDC háromszögek is hasonlók, azért

$$\frac{VD}{VC} = \frac{AB}{AC}, \quad \text{amiből} \quad VD = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{12},$$

és így (1)-ből
$$KT = \frac{CA}{CB} \cdot KD = \frac{4}{5} \cdot \frac{15}{13} \cdot \left(1 + \frac{1}{12}\right) = \frac{4}{5} \cdot \frac{15}{13} \cdot \frac{13}{12} = 1.$$

Ezzel az állításunkat igazoltuk.

III. megoldás: Jelöljük a négyzet oldalát a-val, egyébként használjuk az előbbi jelöléseket. A feladatnál általánosabban számítsuk ki, hogy az AU egyenes egy A-tól x távolságban levő B pontjából a négyzetbe írt körhöz húzott érintő mekkora y szakaszt metsz le az AV egyenesből (2. ábra).

Az érintkezés folytán
$$TB = BU = \frac{a}{2} - x, \qquad TC = CV = \frac{a}{2} - y.$$

Így Pythagoras tétele szerint
$$x^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2} - x + \frac{a}{2} - y\right)^2 = a^2 - 2ax - 2ay + x^2 + y^2 + 2xy,$$
azaz
$$a^2 - 2ax - 2ay + 2xy = 0.$$

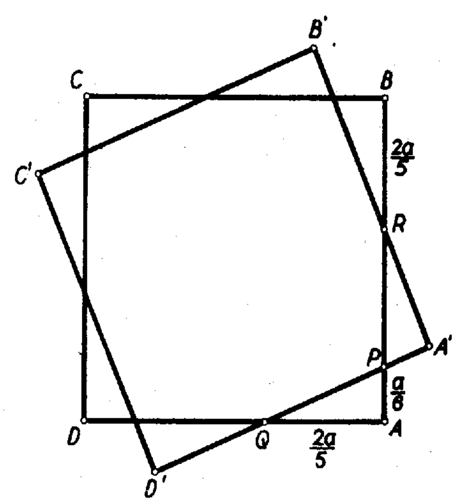
Innen y egyértelműen meghatározható x-hez. Az ilyen y távolságban metsző egyenes lehet csak a kör érintője. Mivel pedig B-ből (BU-n kívül) pontosan egy érintő húzható a körhöz, így ez szükségképpen az AV-t $AC = y$ távolságban metsző egyenes lesz.

A nyert egyenlet mindkét oldalához a^2-et hozzáadva, a következő áttekinthetőbb alakra jutunk:
$$(q - x)(a - y) = \frac{a^2}{2}.$$

Ez tehát a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy az a oldalú négyzet egyik csúcsából induló oldalakat e csúcstól x és y távolságban metsző egyenes érintse a négyzetbe írt kört. Ez $x = \frac{a}{6}$ esetben éppen $y = \frac{2a}{5} = \frac{4a}{10}$-et ad, amivel a feladat állítását igazoltuk.

Megjegyzés: Az ábránk ugyan csak pozitív, $\frac{a}{2}$-nél kisebb x, y értékekre vonatkozik, de könnyen belátható, hogy tetszés szerinti pozitív vagy negatív értékekre is ugyanez a szükséges és elégséges kritérium adódik, ha az AU-val, illetőleg AV-vel ellentétes irányú szakaszokat tekintjük negatívnak.

IV. megoldás: Mérjük rá egy $ABCD$ négyzet minden csúcsából az egyik oldalra egy irányban körülhaladva az oldal hatodrészét, majd ellenkező irányban körüljárva az oldal $2/5$ részét. Ha az egy-egy csúcshoz közelebb eső osztópontokat összekötjük, egy újabb, az előbbivel közös középpontú $A'B'C'D'$ négyzetet kapunk. Ha megmutatjuk, hogy a két négyzet egybevágó, akkor a beírt körük közös, s így igazolást nyer a feladat állítása (3. ábra).



3. ábra

Az egybevágósághoz elég megmutatni, hogy a négyzetek egymásból egybevágó derékszögű háromszögeket metszenek le. Mivel e háromszögek hasonlósága nyilvánvaló, elég egy oldalpárjukról, pl. az átfogókról megmutatni, hogy egyenlők. Jelöljük a négyzet oldalát a-val. Az A csúcsú derékszögű háromszög átfogójára Pythagoras tételével adódik
$$PQ = \sqrt{\frac{a^2}{3b} + \frac{4a^2}{25}} = \frac{13}{30}a.$$

Viszont az A' csúcsú háromszög átfogója
$$PR = a - \frac{a}{6} - \frac{2a}{5} = \frac{13}{30}a.$$

Ezzel feladatunk állítása igazolást nyert.

Megjegyzés: Ha általában $AP = x$, $AQ = BR = y$, akkor a fenti megoldás azt adja, hogy a két négyzet akkor és csak akkor egybevágó, ha
$$x^2 + y^2 = (a - x - y)^2,$$
és ez megegyezik az előző megoldásban nyert egyenlőséggel. Így az ott levezetett kritériumnak egy kevesebb számolást igénylő származtatásához jutunk.

3. feladat. *Bizonyítsuk be, hogy*
$$9^{n+2} + 10^{2n+1}$$
osztható 91*-gyel, ha* n *tetszés szerinti nem negatív egész szúm.*

I. megoldás: Az állítást teljes indukcióval igazolhatjuk. $n = 0$-ra a
$$9^2 - 10 = 91$$
számot kapjuk.

Ha valamilyen $n = k$ értékre már tudjuk, hogy
$$9^{k+2} + 10^{2k+1} = 91 \cdot A,$$
akkor $n = k + 1$-re
$$9^{(k+1)+2} + 10^{2(k+1)+1} = 9 \cdot 9^{k+2} + 10^{2k+3} = 9 \cdot 91A - 9 \cdot 10^{2k+1} + 10^{2k+3} =$$
$$= 91 \cdot 9A + 10^{2k+1}(10^2 - 9) = 91 \cdot (9A + 10^{2k+1}),$$
tehát az állítás $n = k + 1$-re is igaz. Ezzel igazoltuk az állítás helyességét minden nem negatív egész n-re.

II. megoldás: A vizsgálandó kifejezést átalakítjuk:
$$9^{n+2} + 10^{2n+1} = 81 \cdot 9^n + 10 \cdot 100^n = 91 \cdot 9^n + 10(100^n - 9^n).$$
Az első tag osztható 91-gyel, a második tagban zárójelben szereplő különbség osztható az alapok különbségével, azaz $100 - 9 = 91$-gyel. Így az összeg is osztható 91-gyel.

Megjegyzés: Sok más hasonló átalakítás is elvezet az állítás igazolásához.

II. forduló

1. feladat. *Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:*

(1) $$x + y + z = 12,$$
(2) $$x^2 + y^2 + z^2 = 230,$$
(3) $$xy = -15.$$

I. megoldás: Küszöböljük ki (1) segítségével (2)-ből z-t. Rendezve és 2-vel osztva
$$x^2 + xy + y^2 - 12x - 12y = 43.$$
x^2-tel szorozva, és a (3) egyenletet felhasználva az

(4) $$x^4 - 12x^3 - 58x^2 + 180x + 225 = 0$$

egyenlethez jutunk. Ennek az első két tagja megegyezik az $x^2 - 6x$ kifejezés négyzetének első két tagjával; utolsó két tagja pedig a $6x + 15$ (vagy $-6x - 15$) négyzetének utolsó két tagjával. Mind a négy tag előfordul tehát az $x^2 - 6x - 15$ polinom négyzetében. Az egyenlet baloldala tehát így alakítható át:
$$(x^2 - 6x - 15)^2 - 64x^2 = (x^2 - 14x - 15)(x^2 + 2x - 15).$$
x-re tehát 4 értéket kapunk: az
$$x^2 - 14x - 15 = 0 \qquad \text{és az} \qquad x^2 + 2x - 15 = 0$$

egyenletek gyökeit: $x=15,-1;3,-5$. Minden x-hez y-t a (3) és z-t az (1) egyenletből egyértelműen meghatározhatjuk, A lehetséges megoldások

	I.	II.	III.	IV.
$x=$	15,	−1,	3,	−5,
$y=$	−1,	15,	−5,	3,
$z=$	−2,	−2,	14,	14.

Ezek könnyen láthatólag (2)-t kielégítik.

Megjegyzés: Próbálgatással hamar rátalálunk a (4) egyenletnek a -1 gyökére. Másrészt x és y szimmetrikus szerepe miatt ugyanennek az egyenletnek tesznek eleget y gyökei is. Kell tehát, hogy a -1-hez (3)-ból adódó $y=15$ érték is gyöke legyen az egyenletnek, ami így is van. Ennek alapján is eljuthatunk az egyenletnek a fenti megoldásban használt felbontásához.

II. megoldás: Az (1) egyenlet négyzetéből levonva a (2)-t, és (3) kétszeresét, majd 2-vel osztva az

$$(x+y)z=-28 \tag{5}$$

egyenlethez jutunk: A z és $x+y=u$ ismeretlenekre tehát az

$$u+z=12 \tag{5'}$$

$$uz=-28 \tag{1'}$$

egyenletek állnak fenn. Így z és u a

$$v^2-12v-28=0$$

egyenlet két gyöke, bármilyen sorrendben. Mivel $v_1=14$ és $v_2=-2$, azért x és y az

$$x+y=14, \quad xy=-15 \qquad \text{vagy} \qquad x+y=-2, \quad xy=15$$

egyenletrendszernek tesznek eleget. Ezek a fentebb már szerepelt

$$t^2-14t-15=0, \qquad \text{ill.} \qquad t^2+2t-15=0$$

egyenletekre vezetnek (ott t helyett x-szel jelöltük az ismeretlent), s így az előbbi megoldásban talált gyökökhöz jutunk. Ezek kielégítik az (1), (3), (5) egyenleteket. Mivel azonban ezekből (2) következik [ha (1) négyzetéből levonjuk (3) és (5) kétszeresét], azért kielégítik az eredetileg adott egyenletrendszert is.

2. feladat. *Melyik az a két, a számsorban egymás után következő, páratlan szám, amelyeknek négyzetösszege* $\frac{\mathrm{n}(\mathrm{n}+1)}{2}$ *alaké; ahol* n *természetes szám.*

Megoldás: Legyen a két szomszédos páratlan szám $2k-1$ és $2k+1$, ekkor

$$(2k-1)^2+(2k+1)^2=\frac{n(n+1)}{2}$$

azaz

$$16k^2+4=n(n+1).$$

Ezt 4-gyel szorozva, és 1-et hozzáadva

$$64k^2+17=(2n+1)^2$$

$(2n+1)$-et m-mel jelölve, innen

$$m^2-64k^2=(m+8k)(m-8k)=17.$$

Itt feltétel szerint m pozitív, tehát a bal oldal első tényezője is az, s így a másodiknak is annak kell lennie, és kisebbnek az első tényezőnél. Mivel 17 prímszám, az egyetlen lehetséges felbontás

$$m+8k=17, \quad m-8k=1, \qquad \text{és így} \qquad 16k=17-1=16.$$

Innen

$$k=1, \quad m=2n+1=9, \quad \text{azaz} \quad n=4.$$

Valóban

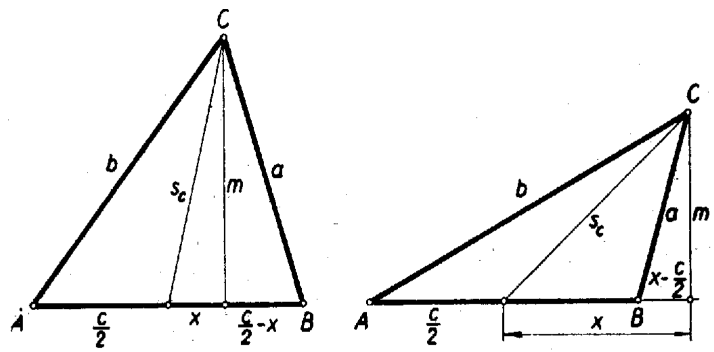
$$1^2+3^2=\frac{4\cdot 5}{2}.$$

3. feladat. *Rögzítsük az* $\mathrm{ABC}_\triangle$*-nek az* A *és* B *csúcsát. Mi a mértani helye azon* C *pontoknak, amelyekre nézve a változó oldalak négyzetösszege*

$$\mathrm{a}^2+\mathrm{b}^2=\mathrm{d}^2$$

ahol d *egy megadott szakasz.*

Megoldás: Megmutatjuk, hogy a feltételnek megfelelő háromszögek C-ből induló súlyvonalai egyenlők. Legyen az AB oldal hossza c, és a C pont AB-n levő merőleges vetületének távolsága AB felezőpontjától x (4. ábra).



4. ábra

Ekkor Pythagoras tétele szerint

$$a^2=\left(\frac{c}{2}-x\right)^2+m^2=\left(\frac{c}{2}\right)^2-cx+x^2+m^2,$$
$$b^2=\left(\frac{c}{2}+x\right)^2+m^2=\left(\frac{c}{2}\right)^2+cx+x^2+m^2,$$

és

$$m^2+x^2=s_c^2.$$

Így

$$d^2=a^2+b^2=2\left(\frac{c}{2}\right)^2+2(x^2+m^2)=2\left(\frac{c}{2}\right)^2+2s_c^2,$$

vagyis

$$s_c^2=\frac{d^2}{2}-\left(\frac{c}{2}\right)^2.$$

Ennek az értéknek pozitívnak kell lennie, különben nem lehetséges olyan háromszög, amely kielégíti a feladat feltételeit. Mivel itt d és c adott, azért s_c hossza független a C pont helyzetétől. Az összes megfelelő pontok tehát rajta vannak az AB szakasz felezőpontja körül

$$r=\sqrt{\frac{d^2}{2}-\left(\frac{c}{2}\right)^2}$$

sugárral rajzolt körön.

Legyen fordítva C' egy tetszés szerinti pont ezen a körön, távolsága A-tól, illetőleg B-től b', ill. a'. Ekkor az ABC' háromszög C'-ből kiinduló súlyvonala r, s így a fenti képlet szerint

$$\frac{d^2}{2}-\left(\frac{c}{2}\right)^2=r^2=\frac{a'^2+b'^2}{2}-\left(\frac{c}{2}\right)^2$$

amiből következik, hogy

$$a'^2+b'^2=d^2,$$

tehát a C' pont megfelel a mértani hely feltételeinek.

A keresett mértani hely tehát az AB szakasz felezőpontja körül r sugárral rajzolt kör.