Alábbiakban közöljük a kezdők (I. osztályosok) versenyén kitűzött feladatok megoldásait.

Az I. forduló feladatai:

1. feladat. *Egy személyvonat déli 12 órakor indul A-ból B-be 60 km/óra állandó sebességgel. Eközben ugyanazon a pályán B-ből A felé halad egy tehervonat 40 km/óra sebességgel. Mindkét vonat egyszerre ér céljához, és ekkor háromszor oly távol vannak egymástól, mint egy órával a találkozásuk előtt. Mikor indult el a tehervonat B-ből?*

Megoldás. Egy óra alatt a személyvonat 60 km-t, a tehervonat 40-et tesz meg. Így a találkozás előtt egy órával 100 km-re voltak egymástól, az egész útjuk pedig 300 km. Ezt a személyvonat 5, a teher 7,5 óra alatt teszi meg, az utóbbi tehát 2 1/2 órával korábban indult, mint a személyvonat, vagyis 9^{30}-kor.

2. feladat. *Bizonyítsuk be, hogy ha a és b az 1-nél kisebb pozitív számok, akkor*

$$1 + a^2 + b^2 > 3ab.$$

I. megoldás: Felhasználva, hogy

$$1 + u^2 \geq 2u, \text{ mert } 1 + u^2 - 2u = (1-u)^2 \geq 0,$$

az egyenlőtlenség bal oldala így alakítható át:

$$\begin{aligned} 1 + a^2 + b^2 = (1+a^2)(1+b^2) - a^2b^2 \geq 2a \cdot 2b - a^2b^2 = \\ = 3ab + ab(1-ab) > 3ab, \end{aligned}$$

mivel a feladat feltételei mellett ab pozitív és 1-nél kisebb. Ezzel bebizonyítottuk a feladat állítását.

II. megoldás: Képezzük a két oldal különbségét:

$$1 + a^2 + b^2 - 3ab = (a-b)^2 + (1-ab).$$

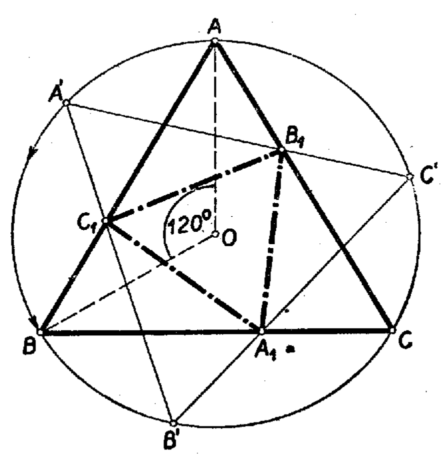
Ha $ab < 1$, akkor a jobb oldal nyilván pozitív, vagyis

$$1 + a^2 + b^2 > 3ab.$$

Megjegyzés: Mint a II. megoldás mutatja, a-ról és b-ről elegendő a feladat követelményei helyett csak annyit tenni fel, hogy szorzatuk 1-nél kisebb. Az I. megoldásban kihasználtuk e szorzat pozitivitását is, holott negatív szorzat esetén világos az állítás helyessége. Azért érthető ez mégis, mert ott már az átalakítás közben egyenlőtlenségeket alkalmaztunk, s az így „rontott” értéket már kissé nehezebb volt becsülni.

3. feladat. *Az ABC és az $A'B'C$ egyező körüljárású szabályos háromszög ugyanabba a körbe van beírva. Bizonyítsuk be, hogy a megfelelő oldalak metszéspontjai szabályos háromszöget alkotnak. (Az AB-nek megfelelő oldal $A'B'$ stb.)*

Megoldás: Jelöljük a BC és $B'C'$, a CA és $C'A'$, végül az AB és $A'B'$ oldalak metszéspontját rendre A_1, B_1, C_1-gyel (1. ábra).



1. ábra

Ha az ábrát a kör O középpontja körül 120°-kal elforgatjuk úgy, hogy A a B pontba kerüljön, akkor a B, C, A', B', C' pontok rendre C, A, B' C', A' pontok helyére kerülnek. Így pl. BC és $B'C'$ metszéspontja, A_1 a CA és $C'A'$ metszéspontjába B_1-be megy át, és hasonlóan a B_1 és C_1 pontok a C_1, ill. A_1 pontok helyére kerülnek. Így O körüli 120°-os elforgatás után az $A_1B_1C_1$ háromszög újra fedi eredeti helyzetét. Ez csak úgy lehetséges, hogy az $A_1B_1C_1$ háromszög szabályos, és körülírt körének középpontja szintén O.

Megjegyzések: 1.) A két háromszög adott elhelyezése mellett, ha az egyik háromszöget megbetűztük, a másikat még háromféleképpen betűzhetjük meg ugyanolyan körüljárás szerint. Ha az oldalak egyeneseit tekintjük (tehát az oldalak meghosszabbításaira eső metszéspontokat is figyelembe veszünk), akkor tehát általában három háromszög kapható, mint a megfelelő oldalak metszéspontja. Ha a két háromszögnek egy oldalpárja párhuzamos, akkor a másik két oldalpár is az, s így csak két háromszög keletkezik. Ha viszont a két háromszög egybeesik, akkor az egyik (az azonos megbetűzéshez tartozó) határozatlanná válik.

2.) A bizonyításban nincs lényegesen kihasználva az sem, hogy a két háromszög ugyanabba a körbe van beírva, csak annyi, hogy a középpontjuk közös. A feladat állítása tehát igaz bármely két szabályos háromszögre, amelyeknek közös a középpontja, és amelyek egyező körüljárás szerint vannak megbetűzve.

A II. forduló feladatai:

1. feladat. *Igaz az, hogy*

$$\frac{b^3+b^3}{a^3+(a-b)^3} \equiv \frac{a+b}{a+(a-b)}\,?$$

I. megoldás: Képezzük a két oldal különbségét:

$$\begin{aligned}
&\frac{a^3+b^3}{a^3+(a-b)^3} - \frac{a+b}{a+(a-b)} = \\
&= \frac{(a^3+b^3)(2a-b)-(a+b)(2a^3-3a^2b+3ab^2-b^3)}{[a^3+(a-b)^3](2a-b)} = \\
&= \frac{2a^4-a^3b+2ab^3-b^4-(2a^4-a^3b+2ab^3-b^4)}{[a^3+(a-b)^3](2a-b)}.
\end{aligned}$$

A számláló azonosan 0, s így a tört értéke 0 mindenütt, ahol értelme van, tehát ahol a nevező nem 0. Ezzel a feladat állítását bizonyítottuk.

Megjegyzés: Ki kellett zárni azokat a helyeket, ahol a nevező 0, noha lehet, hogy az ilyen helyeken a két tört közül valamelyiknek értelme van. Általában helyesnek fogadunk el egy azonosságot, ha a két oldalán álló kifejezések értéke mindenütt megegyezik, ahol mindkét oldalnak értelme van.

II. megoldás: A bal oldalt a következőképpen alakíthatjuk át:

$$\begin{aligned}
&\frac{a^3+b^3}{a^3+(a-b)^3} = \\
&= \frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{[a+(a-b)][a^2-a(a-b)+(a-b)]^2} = \frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{[a+(a-b)](a^2-ab+b^2)}.
\end{aligned}$$

A számláló és nevező közös tényezőjével, ahol annak értéke nem 0, egyszerűsíthetünk, és így éppen az azonosság jobb oldalát kapjuk.

2. feladat. *Egy A és B között közlekedő vonat 20 perccel korábban érkezik B-be, ha sebessége óránként 5 km-rel meghaladja a menetrendszerű sebességet; viszont 25 perc késéssel érkezik, ha sebessége óránként 5 km-rel kevesebb, mint a menetrend szerint. Mekkora a menetrend szerinti sebesség?*

I. megoldás: Jelöljük az AB távolságot a-val. Egy egyenletes sebességgel haladó vonat annyi óra alatt teszi meg ezt az utat, ahányszor az óránként megtett kilométerek száma megvan a-ban. Ha a vonat tényleges sebességét v-vel jelöljük (és a perceket átszámítjuk hatvanad órákká), akkor a feladat feltételei így írhatók:

$$\frac{a}{v-5}-\frac{a}{v}=\frac{25}{60}=\frac{5}{12}, \qquad \frac{a}{v}-\frac{a}{v+5}=\frac{20}{60}=\frac{1}{3}. \tag{1}$$

Elosztva az egyenleteket a-val (ami nem lehet 0), és összevonva

$$\frac{5}{v(v-5)}=\frac{5}{12a}, \qquad \frac{5}{v(v+5)}=\frac{1}{3a}=\frac{4}{12a}.$$

Az első egyenletet 4-gyel, a másodikat 5-tel szorozva a jobb oldalak egyenlők lesznek, tehát a bal oldalak is, és így azok reciprok értékei is:

$$\frac{1}{20}v(v-5)=\frac{1}{25}v(v+5).$$

Az egyenletet 100-zal szorozva, 0-ra redukálva, és v-t kiemelve kapjuk, hogy

$$v[5(v-5)-4(v+5)]=v(v-45)=0.$$

Miután a vonat eredetileg nem állt egy helyben, s így $v=0$ nem megoldása a feladatnak, azért csak egy megoldás lehetséges:

$$v = 45 \text{ km/óra}.$$

Ennek ismeretében bármelyik (1) alatti egyenletből a megtett távolságra ugyanaz az érték adódik:

$$a = 150 \text{ km}.$$

Így a kapott értékek valóban megoldását adják a feladatnak.

A fenti, meglehetősen gépies számítás egy látszólag másodfokú egyenletre vezetett, amelyet azonban egyszerűen meg lehetett oldani. Ha viszont formulák felírása előtt végiggondoljuk a feladat viszonyait, egyszerűbb egyenletet nyerhetünk.

Lényegében ezt a megoldást adta Békési József (Nagykanizsa, Irányi D. g.).

II. megoldás: Képzeljük el, hogy három vonat indul el egyszerre A-ból B felé három egymás melletti sínpáron. Az egyik a tényleg közlekedő vonat v sebességével, a másik $v-5$, a harmadik pedig $v+5$ sebességgel, és ez a harmadik vonat B-n megállás nélkül áthaladva tovább folytatja útját. Mivel a második vonat ugyanannyival kevesebb utat tesz meg óránként az elsőnél, amennyivel többet tesz meg a harmadik, és a vonatok egyenletes sebességgel haladnak, azért az első vonat minden időpontban egyenlő távol van a másik két vonattól.

Mikor az első vonat B-be ér, a harmadik már 20 perce, vagyis $\frac{1}{3}$ órája elhagyta B-t, és így onnan már $\frac{1}{3}(v+5)$ távolságban van. A második vonatnak 25 percnyi, vagyis $\frac{25}{60}=\frac{5}{12}$ órányi útja van hátra, tehát $\frac{5}{12}(v-5)$ km-t kell még megtennie. Mivel az első vonat egyenlő távol van mindig a másik kettőtől, azért

$$\frac{1}{3}(v+5)=\frac{5}{12}(v-5).$$

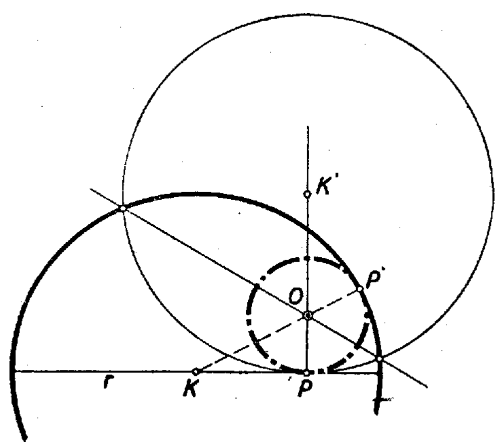
Innen átrendezve

$$v = 45 \text{ km/óra}$$

adódik.

3. feladat. *Adva van egy kör és annak belsejében egy pont. Szerkesszünk kört, amely érinti az adott kört, és az adott pontban érinti a ponton átmenő átmérőt.*

I. megoldás: Készítsünk vázlatot. Legyen az adott kör középpontja K, sugara r, a keresett érintő kör középpontja O. Ha e kör a P pontban érinti az adott kör ott átmenő átmérőjét, akkor egyben érint minden olyan kört is, amelyet az átmérő P-ben érint. Az átmérőt ezért egy – ezek közül alkalmasan választott – körrel helyettesíthetjük.



2. ábra

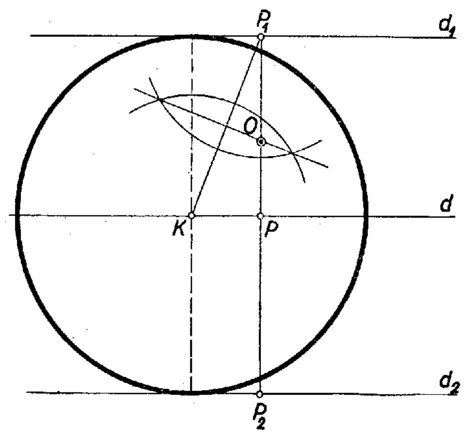
Célszerű lesz ezt a kört úgy választani, hogy az ábra szimmetrikussá váljék. Ez bekövetkezik, ha azt a kört rajzoljuk meg, amelynek sugara az adott kör sugarával egyenlő, és amelyet a keresett kör belülről érint a P pontban (2. ábra). Ezután az átmérőt el is hagyhatjuk. Ezzel az ábra teljesen szimmetrikussá válik. A keresett kör O középpontja rajta van az ábra szimmetria tengelyén, melyet a két egyenlő kör közös húrjaként szerkeszthetünk meg, és a P-n át megrajzolt segédkör P-hez vezető sugarán, amely nem más, mint a P-ben az átmérőre emelt merőleges.

A szerkesztés tehát a következőképpen végezhető: P-ben merőlegest emelünk az átmérőre, erre rámérjük az adott kör $PK'=r$ sugarát, és a K' végpontból e sugárral kört rajzolunk. Ennek az adott körrel való metszéspontjait összekötő egyenes metszi ki a P-ben emelt merőlegesből a keresett O pontot.

Valóban az O körül P-n át húzott kör érinti a P-n átmenő átmérőt, és belülről érinti a segédkört. Így az ábra szimmetriája miatt érinti az adott kört is P-ben (2. ábra).

A segédkört az átmérő mindkét oldalán szerkeszthetjük, így a feladatnak két megoldása van, ha a P pont és az átmérő adva van. A feladat követelményei szerint P-n át átmérőt kell húzni, és azzal elvégezni a szerkesztést. Ezt az átmérőt P egyértelműen meghatározza, kivéve ha P a kör középpontja, amikor az átmérő tetszés szerinti irányban húzható. Utóbbi esetben tehát a feladat határozatlan, minden más esetben két megoldása van. (A versenyzők egy része minden esetben határozottnak vélte a feladatot, ez azonban a középpont megadása esetében csak akkor állna fenn, ha az átmérő előre adott volna.)

II. megoldás: A feladat megoldására kínálkozik a körzsugorítás módszere. Miközben az adott kört a K ponttá zsugorítjuk, az érintő kör előbb ponttá zsugorodik, majd kívülről érintő körbe megy át, és növekszik. A P pont az átmérőre merőlegesen mozdul el, a K ponttá zsugorított kör sugarával P_1-be (ill. P_2-be). A d átmérő egy, a P_1 (ill. P_2) ponton átmenő, és az eredeti d-vel párhuzamos d_1 (ill. d_2) egyenesbe megy át (3. ábra).



3. ábra

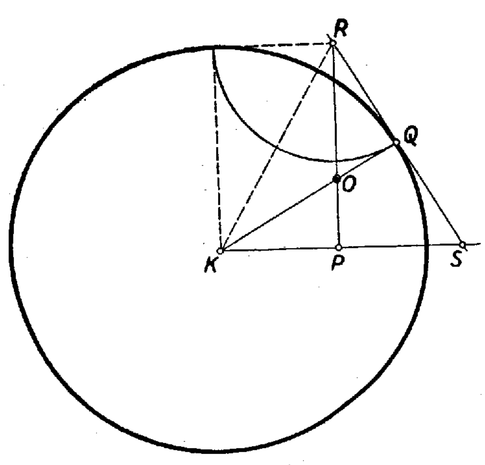
Ezzel visszavezettük a feladatot adott K ponton átmenő, és adott d_1 egyenest adott P_1 pontjában érintő kör szerkesztésére, ami már ismert feladat. A keresett kör O középpontját úgy kaphatjuk, mint a keresett kör két adott pontját (K és P_1) összekötő egyenes felező merőlegesének és az adott d_1 érintőre a P_1 érintési pontban emelt merőlegesnek metszéspontját. Ez a pont egyben az eredeti feladatban keresett kör középpontja is.

Megjegyzések: 1.) Ez a megoldás szoros kapcsolatban van az előzővel. Ez világos lesz, ha észrevesszük, hogy a KP_1 szakasz felező merőlegesének szerkesztéséhez tetszőleges (egyenlő) sugarú körívekül választhatjuk éppen az r sugarú köríveket. Ez esetben a 3. ábra lényegében átmegy a 2. ábrába.

2.) A II. megoldás minden változtatás nélkül alkalmazható akkor is, ha a P pont a körön kívül van. (Ekkor a zsugorításnál a keresett kör kezdettől fogva növekszik.) Az I. megoldás is alkalmazható ebben az esetben is, csak nem bizonyos, hogy a két egyenlő sugarú kör ekkor is metszi egymást. Ha nem, akkor a szimmetria tengelyt pl. úgy kaphatjuk, mint a két kör centrálisának felező merőlegesét. Ez ismét a két megoldás rokonságát mutatja.

Az alábbi megoldások is egyaránt érvényesek a körön belül és kívül levő P pontokra. Az ábrákat azonban mindig a feladat feltételeinek megfelelően készítjük.

III. megoldás: Készítsünk vázlatot. Legyen az adott kör középpontja K, a keresett érintő köré O, a két kör érintkezési pontja Q. Húzzuk meg a Q-n át a közös érintőt és hosszabbítsuk meg az OP szakaszt. A két egyenes metszéspontja legyen R (4. ábra).



4. ábra

A KOP és az ROQ háromszög derékszögű, és O-nál fekvő szögeik egyenlők, mert csúcsszögek (illetőleg a körön kívüli P pontra egybeesnek). Így a két háromszög hasonló. Az OP és OQ oldalaik, mint az érintő kör sugarai, egyenlők, s így a két háromszög egybevágó is. Ennek folytán – az adott kör sugarát r-rel jelölve

$$RP = RO + OP = KO + OQ = KQ = r.$$

(Külső P pont esetén OP és OQ itt negatív előjellel szerepel.)

Ennek alapján a következő szerkesztéshez jutunk: P-ben az átmérőre merőlegest állítunk, és erre rámérjük az adott kör sugarát. Megszerkesztjük ennek R végpontjából húzható, és az átmérővel nem párhuzamos, érintő Q érintési pontját. Azt állítjuk, hogy PR és KQ metszéspontja a keresett kör O középpontja.

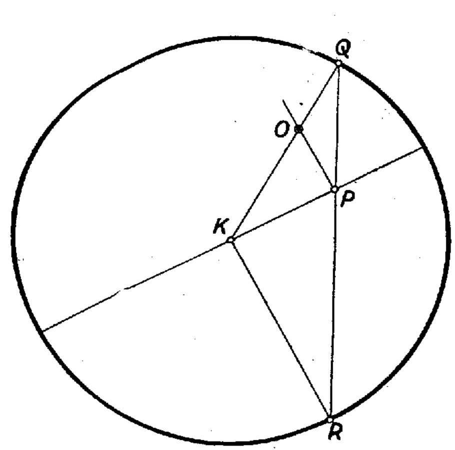
Ennek igazolására jelöljük még meg az RQ és KP egyenesek S metszéspontját. A KQS és RPS háromszögek derékszögűek, S-nél levő szögeik közösek (illetőleg csúcsszögek) és a szerkesztés szerint

$$RP = KQ = r,$$

tehát a két háromszög egybevágó. Ennek folytán a KRS háromszög egyenlő szárú ($KS = RS$) és így a szárakhoz tartozó magasságok metszéspontja O egyenlő távol van a két szártól. Az O körül P-n át húzott kör tehát Q-ban érinti az RS egyenest, és így az adott kört is.

Aszerint, hogy R-t az átmérő melyik oldalán szerkesztjük meg, ismét két megoldás adódik általában.

IV. megoldás: A kisebbik kört a közös Q érintési pontból, mint nyújtási középpontból nagyítva, a kör egy-egy pontja, pl. P egy Q-n átmenő egyenesen mozdul el. Egy-egy egyenes, pl. az OP körsugár, pedig önmagával párhuzamos helyzetbe megy át. Ilyen átalakítással az érintő kör átvihető az adott körbe. Eközben OP az átmérőre merőleges KR sugárba megy át (5. ábra). Ennek alapján R megszerkeszthető.



5. ábra

A szerkesztés menete: Az adott kör K középpontjában az átmérőre állított merőleges egyik metszéspontja az adott körrel legyen R, és RP-nek a körrel való metszéspontja Q. Azt állítjuk, hogy KQ-nak és a P-ben az átmérőre emelt merőlegesnek O metszéspontja a keresett kör középpontja. Valóban az OPQ és KRQ háromszögek megfelelő oldalai párhuzamosak, és így megfelelő szögeik egyenlők. Az utóbbi háromszöggel együtt tehát az előbbi is egyenlő szárú:

$$OP = OQ.$$

Az O körül P-n át húzott kör tehát átmegy Q-n is, és mivel ez a pont a két kör KO centrálisán van, így a két kör ebben a pontban érintkezik.

Itt is két megoldást kapunk általában az átmérő két oldalán.