(2., befejező közlemény)

III. Magasabbrendű determinánsok

A háromismeretlenes egyenletrendszer megoldásánál fellépő bonyolult együtthatókat a harmadrendű determináns bevezetésével tettük áttekinthetőkké és könnyen kezelhetőkké. A négy- és többismeretlenes egyenletrendszer megoldásánál még bonyolultabb kifejezések lépnek fel, ezek áttekintésére – az előzőekhez teljesen hasonlóan – bevezethetnők a negyed- és magasabbrendű determinánsokat. De kínálkozik egy másik mód is. Ahogyan a harmadrendű determináns definíciójánál a már ismert másodrendű determinánsra támaszkodtunk, úgy a harmadrendű determináns segítségével definiálható a negyedrendű determináns, és így tovább. Az olyan típusú definíciót, amely mindig az egy lépéssel előbb definiált fogalomra építi fel a következő fogalmat bizonyos utasítás alapján, rekurzív definíciónak, az utasítást rekurziós formulának nevezzük.

Ilyen módon az n-edrendű determináns definíciója a következő: *n-edrendű determináns*nak nevezzük az n sorba és n oszlopba rendezett n^2 számú elem alábbi módon kiszámítható kifejezését:

(5)
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$+a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & an_4 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} - \dots + (-1)^{n+1} a_{1n} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n-1} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn-1} \end{vmatrix}.$$

Az előjelek váltakozva következnek, és minden elem egy $(n-1)$-ed rendű determinánssal van megszorozva, amely úgy keletkezik, hogy az eredeti determinánstól a kérdéses elemet tartalmazó sort és oszlopot elhagytuk. Az így kapott determinánst – előjelével együtt! – az illető elemhez tartozó *aldeterminána*nak nevezzük. (Az a_{11} elemhez tartozó aldetermináns jele A_{11} stb.) Ez utóbbi eljárást a *determináns első sora szerinti kifejtés*ének szokás nevezni.

Ha a kifejtés során kapott $(n-1)$-edrendű aldeterminánsokat az adott utasítás alapján ismét kifejtjük, $(n-2)$-edrendű determinánsokhoz, az eljárást folytatva végül is másodrendű determinánsokhoz jutunk; ezek értéke pedig a már ismert módon kiszámítható. Figyeljük meg azt is, hogy a kifejtések során annak az elemnek a sorát és oszlopát, amellyel az aldeterminánsokat szoroztuk, mindig elhagytuk, így az eljárás végén kapott szorzatokban minden sorból és oszlopból pontosan egy elem szerepel. A szorzatok n tényezősek, mert n oszlopból és sorból kellett kiválogatnunk a tényezőket. Ezek szerint az n-edrendű determináns értéke (a harmadrendűhöz hasonlóan) kiszámítható úgy is, hogy a determináns elemeiből elkészítjük az összes n tényezős szorzatokat úgy, hogy a szorzatokban minden oszlopból és sorból pontosan egy elem szerepeljen.

Kérdéses még az, hogyan állapítjuk meg a kapott szorzatok előjelét. Az (5) kifejtésben az a_{1k_1}, elemmel szorzott aldetermináns akkor kap negatív előjelet, ha k_1 oszlopindex páros, azaz ha k_1-nél kisebb indexek száma páratlan. A teljes kifejtésben minden a_{1k_1}, a_{2k_2}, …, a_{nk_n} tagban ezek a k_1-nél kisebb oszlopindexek az a_{1k_1}, tényező *mögött* álló tényezőnek oszlopindexei, azaz *páratlan számú oszlopindex van inverzióban* k_1-gyel. Ezeket a tagokat a kifejtés értelmében negatív előjellel kell ellátni.

Lépésről lépésre továbbhaladva a kifejtésben teljesen hasonló gondolatmenettel megállapítható, hogy *egy a_{1i_1}, a_{2i_2}, a_{ni_n} tag előjele aszerint pozitív vagy negatív, amint az $i_1 i_2 \dots i_n$ permutációban az inverziók száma páros-e vagy páratlan.* Egy ilyen tag tehát

$$(-1)^j a_{1k_1} a_{2k_2} \dots a_{nk_n}$$

alakú, ahol j jelenti a k_1, k_2, …, k_n permutáció inverzióinak a számát.

Ha az oszlopindexek összes permutációjával (ezek száma pedig $n!$) képezzük ezeket a tagokat, megkapjuk az összes n tényezős szorzatot. Az n-edrendű determináns ezen tagok összege, azaz

$$D = \sum_p (-1)^j a_{1k_1} a_{2k_2} \dots a_{nk_n},$$

ahol az összegezés az 1, 2, …, n számok összes permutációjára vonatkozik (ezt jelöli a szumma alatti p), j pedig az éppen szereplő permutáció inverzióinak a száma. (Látjuk, hogy egy n-edrendű determinánsnak n^2 számú eleme és $n!$ számú tagja van.)

IV. Az n-rendű determináns tulajdonságai

Az alábbiakban a determinánsok egynéhány jellemző tulajdonságát említjük meg.

1. A determináns értéke nem változik, ha sorait felcseréljük oszlopaival (a determinánst tükrözzük a főátlóra.)

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = D'.$$

Bizonyítás: Készítsük el mind a két determináns tagjait:

$$D = \Sigma(-1)^K a_{1k_1} a_{2k_2} \dots a_{nk_n}$$
$$D' = \Sigma(-1)^J a_{i_1 1} a_{i2_2} \dots a_{i_n n},$$

ahol K jelenti a k_1, k_2, ..., k_n permutáció, I pedig az i_1, i_2, ..., i_n permutáció inverzióinak a számát, az összegezés természetesen az összes permutációkra vonatkozik.

D minden tagjában a sorindexek (első indexek), D' minden tagjában az oszlopindexek (második indexek) vannak természetes sorrendben, és mellettük az oszlop-, illetve sorindexek egy-egy permutációja áll. Nyilvánvaló, hogy D minden tagjának megfelel D'-nek egy olyan tagja, amelyben a tényezők ugyanazok, de más sorrendben állnak, és megfordítva.[1] Szemeljünk ki két ilyen egymásnak megfelelő tagot. Mivel a két kiszemelt tag csak a tényezők sorrendjében különbözik egymástól, abszolút értékük egyenlő, és így csak az előjelet kell még megállapítani. Az előjelet pedig, ha a sorindexek természetes sorrendben vannak, az oszlopindexek permutációjának párossága dönti el.

Cseréljük fel a D' determináns kiszemelt tagjának tényezőit úgy, hagy az oszlopindexek helyett a sorindexek legyenek természetes sorrendben. Ezzel természetesen az oszlopindexek természetes sorrendje felbomlik, és annak egy permutációja áll elő. Ha sikerül bebizonyítani, hogy az i_1, i_2, ..., i_n és k_1, k_2, ..., k_n permutációk inverzióinak száma, és ezzel a kiszemelt tag előjele nem változik meg, állításunkat bebizonyítottuk, mert ekkor D minden tagjához találtunk D' felbontásában egy vele pontosan egyenlő tagot, és fordítva, így a két determináns értéke egyenlő.

Bebizonyítjuk tehát még azt, az i_1, i_2, ..., i_n és a k_1, k_2, ..., k_n permutációk inverzióinak a száma egyenlő.

a) Tegyük fel, hogy két i (sor) index között pl. i_v és i_μ között inverzió van, azaz $i_v > i_\mu$, de i_v mégis előbb áll, mint i_μ vagyis $v < \mu$:

$$\dots a_{i_v v} \dots a_{i_\mu \mu} \dots$$

Ha most a szorzat tényezőit az első sorindexek szerint rendezzük, akkor a kisebb i_μ indexű $a_{i_\mu \mu}$ tényező előbb fog állani, mint az i_μ-nél nagyobb i_v indexű $a_{i_v v}$ tényező:

$$\dots a_{i_\mu \mu} \dots a_{i_v v} \dots$$

Ekkor pedig $\mu > v$ folytán μ és v fog inverziót alkotni. Így ha az első szorzatnál i_v és i_μ, volt inverzióban, akkora második szorzatnál v és μ lesz inverzióban.

b) Ha pedig i_v és i_μ nincsenek inverzióban, azaz $i_v < i_\mu$ és $v < \mu$, akkor az első indexek szerint történő átrendezéskor az $a_{i_v v}$ elem továbbra is megelőzi az $a_{i_\mu \mu}$ elemet, és így v és μ a második szorzatban sem lesz inverzióban.

Ezek szerint tehát, ha az első indexekben két elem között inverzió volt, akkor az átrendezés után a megfelelő tényezők cseréje miatt a hozzájuk tartozó második indexek között lesz inverzió, ha több elempár volt inverzióban, akkor ugyanannyi lesz a csere után is, ha pedig nem volt közöttük inverzió, akkor a megfelelő tényezőknek egymáshoz viszonyított helyzete nem változott, tehát a hozzájuk tartozó második indexekben sem lesz inverzió. Éppen ezért az átrendezés utáni tag pontosan *ugyanazt* az előjelet kapja, mint az átrendezés előtti. Ezzel a tételt teljes egészében bebizonyítottuk.

Az első tulajdonság lehetővé teszi azt, hogy a determinánst ne csak az első sora, hanem az első oszlopa szerint is kifejthessük. Önként felmerül a kérdés, nem lehetne-e más sora (oszlopa) szerint kifejteni a determinánst, és ha igen, akkor hogyan? A kérdésre a 2. tulajdonság ad választ:

2. A determináns tetszőleges sora (oszlopa) szerint kifejthető. A tetszőleges sor szerinti kifejtés azt jelenti, hogy az illető sor minden elemét megszorozzuk az elemhez tartozó aldeterminánssal és ezeket az értékeket összeadjuk.

Az egyes elemekhez tartozó aldeterminánsok előjelét a sakktábla-szabály alapján állapítjuk meg:

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & - & + & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

---

[1] Pl. az $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$ negyedrendű determináns egyik tagja $- a_{12}a_{24}a_{31}a_{43}$. Cseréljük fel az oszlopokat a sorokkal. Az előbbi tagnak most a $- a_{31}a_{12}a_{43}a_{24}$ felel meg.

Tekintsünk egy tetszőleges sor szerinti kifejtést. Mivel mindig a szorzó elemek sorát és oszlopát elhagyva készítjük el a megfelelő aldeterminánst, ez azt biztosítja, hogy végül is az n tényezős szorzatokban minden oszlopból és sorból pontosan egy elem szerepel. Így – az előjelet egyelőre nem vizsgálva – pontosan azokat a tagokat kapjuk, mint az első sor szerinti kifejtéskor. Az (5) kifejtésben már lerögzítettük, hogy az előjelek váltakozva következnek. Ha az (első tulajdonságot felhasználva) determináns sorait és oszlopait felcseréljük, látjuk, hogy az a_{12} elemhez tartozó negatív előjelű aldetermináns most az a_{21} elemhez fog tartozni, tehát a második sor első eleméhez negatív előjelű determináns tartozik. Az előjelek váltakozása miatt most már a második sor minden eleméhez tartozó aldetermináns előjelét megállapíthatjuk. Így fokozatosan továbbhaladva megállapíthatjuk a harmadik sor és oszlop elemeihez tartozó aldeterminánsok előjelét stb. Ezeket a megállapításokat rögzíti könnyen megjegyezhető formában a „sakktábla-szabály."

3. Ha a determináns két sorát (oszlopát) felcseréljük egymással, a determináns értéke (-1)*-gyel szorzódik.*
Bizonyítás:
Először arra az esetre szorítkozunk, amikor két *szomszédos* sort cserélünk fel egymással. Cseréljük fel az eredeti determinánsnak pl. a két szomszédos i-edik és j-edik sorát egymással. Fejtsük ki az eredeti determinánst az i-edik, a felcserélt sorú determinánst pedig a j-edik (ahol most az eredeti determináns i-edik sorának elemei vannak!) sora szerint. Azt tapasztaljuk, hogy a szorzó elemek mind a két kifejtésnél rendre ugyanazok, sőt a hozzájuk tartozó aldeterminánsok elemei is, csak éppen az aldeterminánsok – a „sakktábla szabály" miatt – ellenkező előjelet kapnak. Így a második determináns kifejtésének minden tagja az eredeti determináns kifejtése megfelelő tagjának (-1)-szerese, így értéke és az eredeti determináns értékének (-1)-szerese.

Egyszerű számolással belátható, hogy két nem szomszédos sor felcserélése mindig páratlan számú szomszédcsere útján történik,[2] minden szomszédcsere alkalmával tehát (-1)-gyel, összesen (-1)-nek páratlan kitevőjű hatványával, azaz (-1)-gyel szorzódik az eredeti determináns értéke.

A harmadik tulajdonságból könnyen leolvasható a következő:

4. Ha egy determináns két sora (oszlopa) megegyezik egymással (elemről elemre), akkor a determináns értéke 0.
Bizonyítás:
Jelöljük a szóban forgó determináns értékét D-vel. Ha a két megegyező sort (oszlopot) felcseréljük, akkor a determináns értéke egyrészt változatlan marad, másrészt az előző tulajdonság miatt (-1)-gyel szorzódik, azaz $D = -D$, ami csak úgy lehet, ha $D = 0$. A determináns kifejtése szempontjából nagyon lényeges a következő tulajdonság.

5. Ha egy determináns **egyik** *sorának (vagy oszlopának) elemeit egy* **másik** *sor (illetve oszlop) megfelelő elemeihez tartozó aldeterminánsokkal szorozva adjuk össze, eredményül mindig nullát kapunk:*

$$a_{i1}Aj_1 + a_{i2}A_{j2} + \ldots + a_{in}A_{jn} = 0 \text{ ha } i \neq j.$$

(Az i-edik sor elemeit szoroztuk a j-edik sor elemeihez tartozó aldeterminánsokkal.)

A bizonyítást arra az esetre végezzük el, amikor pl. a második sor elemeit az első sor elemeihez tartozó aldeterminánsokkal szoroztuk meg.

Tekintsük az eredeti D determinánsnak az első sora szerinti kifejtését:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n}.$$

A D determinánsból készítsük el azt a D^* determinánst, amely D-ből úgy keletkezik, hogy D-nek első sora helyett a másodikat írjuk (a második sor természetesen a helyén marad!). Ennek a determinánsnak értéke (a 4. tulajdonság miatt) nulla.

$$D^* = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

Fejtsük ki a determinánst első sora szerint. Mivel a determináns a második sortól kezdve D-vel teljesen megegyezik, D^* első sorának elemeihez tartozó aldeterminánsok megegyeznek D megfelelő aldeterminánsaival, ennélfogva D^* kifejtése ez lesz:

$$D^* = a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + \ldots + a_{2n}A_{1n} = 0.$$

Ez pedig éppen a bizonyítandó egyenlőség.

6. Ha egy determináns valamelyik sorának (oszlopának) mindegyik elemét megszorozzuk ugyanazzal a c *számmal, akkor a determináns értéke is szorzódik ezzel a* c *számmal.* (A c „kiemelhető" a determinánsból.)

[2] Ha az i-edik és l-edik sor között k sor van, akkor k db szomszédcserével az i-edik mellé hozzuk az l-ediket, 1 cserével felcseréljük a kettőt, és újabb k db cserével az l-edik sor helyére visszük az i-edik sort. Ez összesen $2k + 1$ szomszédcsere, ami (k paritásától függetlenül) mindig páratlan szám.

Ennek belátására azt kell meggondolnunk, hogy a kifejtett determináns bármely tagja mindegyik oszlopból és mindegyik sorból pontosan egy elemet tartalmaz. Ha tehát a determináns egy bizonyos sorának (oszlopának) mindegyik elemét megszorozzuk c-vel, akkor a determináns bármelyik tagjában pontosan egy tényező szorzódik c-vel, így az illető tag maga is. Ekkor pedig nyilvánvaló, hogy a determináns értéke is c-vel szorzódik.

7. Ha egy determináns valamely sorában (oszlopában) csupa 0 *állt, a determináns értéke nulla.*

Ez az előző tulajdonság közvetlen következménye, amikor $c = 0$.

8. Ha egy determinánsban a főátlóban álló elemek alatt (vagy felett) álló minden elem 0*, akkor a determináns értéke a főátlóban álló elemek szorzata.*

Ugyanis a kifejtett determináns minden tagjában – egy kivételével – legalább egy nulla szerepel tényezőként, a kivételes tag pedig éppen az, amelyikben a főátló elemei állnak.

A 4. és 6. tulajdonság következménye a következő:

9. Ha a determináns egyik sora (oszlopa) egy másik sorának (oszlopának) többszöröse, vagyis másképpen fogalmazva: ha a determináns két sora (oszlopa) arányos, *a determináns értéke* 0.

A 6. tulajdonság lehetővé teszi ugyanis, hogy az egyik sorból (oszlopból) az arányossági tényezőt „kiemelhessük". A kiemelés után kapott determináns két sora (oszlopa) egyenlő, így értéke nulla.

10. Ha a determináns valamelyik sorának (oszlopának) minden eleme két szám összegére bontható, akkor a determináns két determináns összegére bontható a következő módon:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{i1}+a'_{i1} & a_{i2}+a'_{i2} & \dots & a_{in}+a'_{in} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{1n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \dots & a'_{1n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Bizonyítás:

A baloldalon álló determinánst kifejtve kapjuk

$$D = \sum_p (-1)^K a_{1k_1} a_{2k_2} \dots (a_{ik_i} + a'_{ik_i}) \dots a_{nk_n},$$

ahol K a szokott módon a $k_1, k_2, \dots, k_n$ permutáció inverzióinak a számát jelöli, és az összegezés az összes permutációra történik. A kijelölt szorzást elvégezve ez az összeg két tagra bontható fel: ez pedig éppen a jobboldalon álló két determináns kifejtése. A 9. és 10. tulajdonságra támaszkodik a következő:

11. A determináns értéke nem változik meg, ha egyik sorához hozzáadunk egy másik sort vagy ennek egy többszörösét.

(Megjegyezzük, hogy egy sornak egy sorhoz való adásán azt értjük, hogy az egyik sor első, második, $\dots n$-edik eleméhez hozzáadjuk a másik sor első, második, $\dots n$-edik elemét, és ugyanakkor a másik sor elemeit változatlanul a helyükön hagyjuk.)

Adjuk pl. az első sorhoz a második sor λ-szorosát, és a kapott determinánst bontsuk két determináns összegére:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+\lambda a_{21} & a_{12}+\lambda a_{22} & \dots & a_{1n}+\lambda a_{2n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Itt az első determináns az eredeti determináns, a második determináns értéke pedig 0, mert egyik (első) sora egy másik (második) sorának többszöröse.

A bizonyítást az első és második sorra végeztük el, de természetesen bármelyik két sorra ugyanúgy történhet. A determinánsok ezen tulajdonsága teszi lehetővé a magasabbrendű determinánsok egyszerűbb kiszámítását.

Számítsuk ki pl. a következő negyedrendű determináns értékét:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 & 2 \\ 3 & -6 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -9 & 0 \\ -2 & -2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

D értéke változatlan marad, ha az első sor (-3) -szorosát a második, az első sor (-2)-szeresét a harmadik, az első sor 2-szeresét a negyedik sorhoz adjuk. Ezzel elérjük, hogy az első oszlopban csak egy nullától különböző elem áll:

$$D=\begin{vmatrix}1&2&-4&2\\3&-6&2&-1\\2&4&-9&0\\-2&-2&3&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&-4&2\\0&-12&14&-7\\2&4&-9&0\\-2&-2&3&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&-4&2\\0&-12&14&-7\\0&0&-1&-4\\-2&-2&3&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&-4&2\\0&-12&14&-7\\0&0&-1&-4\\0&2&-5&6\end{vmatrix}.$$

Miután a második oszlopból. kiemeltünk 2-t, arra törekszünk, hogy a főátló alatt álló elemek helyére 0 kerüljön, vagyis az egyik sorban az első, egy másikban az első két, egy harmadikban pedig az első három elem 0 legyen. Ezt pl. úgy érjük el, hogy először az utolsó sor 6-szorosát hozzáadjuk a második sorhoz, ekkor a második sorban már az első két elem 0 lesz, majd a harmadik sor -16-szorosát hozzáadjuk a második sorhoz, és ekkor a második sorban az első három elem 0 lesz.

$$D=2\begin{vmatrix}1&2&-4&2\\0&-6&14&-7\\0&0&-1&-4\\0&1&-5&6\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}1&1&-4&2\\0&0&-16&29\\0&0&-1&-4\\0&1&-5&6\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}1&1&-4&2\\0&0&0&93\\0&0&-1&-4\\0&1&-5&6\end{vmatrix}.$$

Ha a második és negyedik sort felcseréljük (ami előjelváltozással jár) a főátló alatt csupa 0 elem áll, így a determináns értéke (8. tulajdonság alapján) a főátlóban álló elemek szorzata, vagyis

$$D=-2\begin{vmatrix}1&1&-4&2\\0&1&-5&6\\0&0&-1&-4\\0&0&0&93\end{vmatrix}=-2\cdot1\cdot1\cdot(-1)\cdot93=186.$$

Ezt az aránylag elég hosszú eljárást azért neveztük egyszerűnek, mert pl. már a negyedrendű determináns $4!=24$ tagjának összegét is sokkal fáradságosabb kiszámítani.

V. Alkalmazások

A determinánsok a matematika csaknem minden ágában széleskörű alkalmazást nyernek.

1. Kézenfekvő, hogy elsőnek azt az alkalmazási területet említsük meg, amely szükségessé tette a determinánsok bevezetését, ez pedig a többismeretlenes lineáris egyenletrendszerek megoldása. A két- és háromismeretlenes egyenletrendszer megoldásával már foglalkoztunk.

Az alábbiakban csak olyan lineáris egyenletrendszer megoldásával foglalkozunk, amelyben az ismeretlenek száma pontosan egyenlő az egyenletek számával.

Tekintsük a következő n ismeretlenes egyenletrendszert

$$\begin{aligned}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+\dots\quad+a_{1n}x_n&=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+\dots+a_{2n}x_n&=b_2\quad(6)\\\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+a_{n3}x_3+\dots\quad+a_{nn}x_n&=b_n\end{aligned}$$

Itt az a_{ik} és b_k betűk ismert számokat az x_k betűk az ismeretleneket jelölik. [A (6) egyenletrendszert inhomogénnek szokás nevezni, ellentétben a homogén egyenletrendszerrel, amelyben minden $b_i=0$.]

Tekintsük továbbá azt az esetet, amikor a bal oldalon álló együtthatókból készített determináns (az egyenletrendszer determinánsa) értéke nem nulla:

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\dots&a_{2n}\\\dots&\dots&\dots&\dots\\a_{n1}&a_{n2}&\dots&a_{nn}\end{vmatrix}\neq0$$

Látni fogjuk, hagy ebben az esetben az egyenletrendszer egyértelműen megoldható.

Ahhoz, hogy az egyenletrendszer valamelyik ismeretlenjét kifejezhessük, találni kellene olyan szorzókat, amelyekkel az egyenleteket megszorozva és összeadva azokat – egy kivétellel – valamennyi ismeretlen *egyszerre* „kiesik”. Az n-ed rendű determinánsra vonatkozó 5. tulajdonság (ha egy oszlop elemeit nem a hozzájuk tartozó aldeterminánsokkal szorozzuk, összegül 0-t kapunk) módot ad a kívánt tulajdonságú szorzók meghatározására.

Határozzuk meg pl. az első ismeretlen értékét. Ennek végrehajtásakor először is olyan szorzókat kell keresnünk, amelyekkel rendre megszorozva az egyenleteket összeadás után az első ismeretlentől eltekintve minden ismeretlen együtthatója nulla lesz. A keresett szorzók – amint erről azonnal meg fogunk győződni – éppen a D determináns első oszlopának (tehát éppen a kiszámítandó x_1 ismeretlen együtthatóit tartalmazó oszlopnak) elemeihez tartozó aldeterminánsok lesznek: A_{11}, A_{21}, $\ldots$, A_{2n}. Szorozzuk meg rendre a (6) rendszer egyenleteit ezekkel az aldeterminánsokkal (pontosabban: az i-edik egyenletet A_{i1}-gyel!), a kapott kifejezéseket adjuk össze és az ismeretleneket emeljük ki:

$$\begin{aligned}
&(a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+\ \ldots+a_{n1}A_{n1})x_1\ +\\
&+(a_{12}A_{11}+a_{22}A_{21}+\ \ldots+a_{n2}A_{n1})x_2\ +\\
&+\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ +\\
&+(a_{1n}A_{11}+a_{2n}A_{21}+\ \ldots+a_{nn}A_{n1})x_n=\\
&=b_1A_{11}+b_2A_{21}+\ \ \ldots\ \ +b_n\,A_{n1}.
\end{aligned}$$

Itt x_1 együtthatója éppen a D determináns első oszlopa szerinti kifejtése, tehát x_1 együtthatója éppen D. Minden más x_i ismeretlen együtthatója 0, mert az illető zárójelben az i-edik oszlop elemei vannak az első – tehát nem a hozzátartozó – oszlop elemeihez tartozó aldeterminánsokkal szorozva, ezek összege pedig (az 5. tulajdonság értelmében) nulla.

A jobboldal is felfogható egy determináns kifejtésének, amely a D determináns első oszlopa szerinti kifejtéséből úgy származtatható, hogy a_{11}, a_{21}, a_{31}, $\ldots$, a_{n1} helyébe rendre az egyenletrendszer jobb oldalán álló b_1, b_2, $\ldots$, b_n számokat tesszük. A jobb oldalon tehát éppen a

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ b_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ b_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

determinánsnak első oszlopa szerinti kifejtése áll. A D_1 a D-ből úgy keletkezett, hogy az első oszlop elemei helyébe az egyenlet-rendszer jobboldalán álló számokat tettük. Így x_1-re a következő egyenletet kaptuk:

$$Dx_1=D_1,$$

ebből (mivel feltettük, hogy $D\neq 0$)

$$x_1=\frac{D_1}{D}.$$

A többi ismeretlen teljesen hasonló eljárással számítható ki:

$$x_k=\frac{D_k}{D},\quad (k=1,2,\ldots n), \tag{7}$$

ahol D_k úgy keletkezik D-ből, hogy a k-adik oszlop elemei (a kifejezendő ismeretlen együtthatói) helyébe az egyenletrendszer jobboldalán álló számokat tesszük.

Eddig csupán azt láttuk, hogy ha van megoldása a (6) egyenletrendszernek, akkor az csak a (7) lehet, még hátra van annak kimutatása, hogy a Cramer-szabály segítségével nyert értékrendszer csakugyan kielégíti az egyenletrendszer minden egyenletét.

Helyettesítsük be a kapott (7) értékrendszert pl. a j-edik egyenlet bal oldalába, és jelöljük a bal oldal így nyert értékét H-val:

$$H=a_{j1}x_1+a_{j2}x_2+\ldots+a_{jn}x_n=\frac{1}{D}(a_{j1}D_1+a_{j2}D_2+\ldots+a_{jn}D_n).$$

A D_1, D_2, D_3, $\ldots$, $D_n$determinánsokban a b_1, b_2, $\ldots$, $b_n$elemek rendre az első, második, harmadik, $\ldots$, n-edik oszlopot alkotják. Cseréljük fel ezen determinánsok oszlopait úgy, hogy ezek az elemek minden determinánsban az első oszlopban szerepeljenek. Ekkor a többi oszlopban sorrendben a D determináns oszlopainak elemei állnak, de minden $D_i$determinánsból a D determináns egyik oszlopa – éppen az i-edik (mert annak helyébe kerültek a b_1, $\ldots$, b_n elemek) – hiányzik. A b_1, b_2, $\ldots$, b_n elemek a második determinánsban egy oszlopcserével a harmadikban kettő, az n-edik determinánsban $(n-1)$ oszlopcserével kerülnek az első oszlopba.

Jelöljük ezeket a felcserélt oszlopú determinánsokat D_i'-vel. D_i' értéke az oszlopcserék miatt (3. tulajdonság értelmében) vagy egyenlő D_i-vel, vagy ellenkező előjelű aszerint, amint páros vagy páratlan számú oszlopcserét végeztünk. Így

$$\begin{aligned}H=\frac{1}{D}(a_{j1}D_1+a_{j2}D_2+\ldots+a_{jn}D_n)=\frac{1}{D}(a_{j1}D_1'-a_{j2}D_2'+\ldots+\\ +(-1)^{n+1}a_{jn}D_n').\end{aligned}$$

Emeljük kí a zárójelből a (-1)-gyet, és írjuk az első tag elé a 0 értékű $0\cdot D$ kifejezést. Ekkor a következő kifejezést kapjuk:

$$H=-\frac{1}{D}(0\cdot D-a_{j1}D_1'+a_{j2}D_2'+\ldots+(-1)^n a_{jn}D_n').$$

Mivel a zárójel az alábbi $(n+1)$-edrendű determináns első sora szerinti kifejtésének tekinthető, írhatjuk

$$H = -\frac{1}{D}\begin{vmatrix} 0 & a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ b_1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Ha ezt a determinánst első oszlopa szerint kifejtjük, a kapott determinánsok mindegyike – a b_j elemhez tartozó kivételével – nulla, mert két soruk (az első és a j-edik) egyenlő. Így

$$H = -\frac{1}{D}(-b_j)D = b_j,$$

azaz a (6) egyenletrendszernek (7) valóban megoldása.

Ezzel teljessé vált annak a bebizonyítása, hogy a (6) egyenletrendszer, ha az egyenletrendszer determinánsa nem egyenlő nullával, mindig egyértelműen oldható meg, és az egyetlen megoldást a Cramer-szabály szolgáltatja.

2. Második alkalmazásként foglalkozzunk a két adott ponton áthaladó egyenes egyenletével.

Az egyenes általános egyenlete

$$Ax + By + C = 0,$$

ahol A, B és C ismert számok, amelyek mind egyszerre nem lehetnek nullák. Ha $(x_1; y_1)$ és $(x_2; y_2)$ a két adott pont, amelyeken az egyenes átmegy, $(x; y)$ az egyenes egy tetszőleges pontja, akkor kell, hogy ezek a pontok kielégítsék az egyenes egyenletét, vagyis fennálljon

$$\begin{aligned} Ax + By + C &= 0 \\ Ax_1 + By_1 + C &= 0 \\ Ax_2 + By_2 + C &= 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Ez egy egyenletrendszer az ismeretlen A, B, C számok meghatározására. Az ilyen típusú egyenletrendszer, amelyben a jobb oldalon csupa 0 áll (nincs konstans egyik egyenletben sem), *homogén* egyenletrendszernek nevezzük.

A (8) homogén egyenletrendszernek egy megoldását azonnal felírhatjuk, tudniillik, ha $A = B = C = 0$, mindhárom egyenlet teljesül. Ezt a megoldást amikor minden ismeretlen 0, a homogén egyenletrendszer *triviális megoldás*ának szoktak nevezni. Ez a megoldás feladatunknak nem felel meg, mert ahhoz, hogy egyenest kapjunk, A, B és C egyszerre nem lehet 0.

Kíséreljük meg a Cramer-szabály segítségével kiszámolni az A, B és C ismeretlenek értékét. Tegyük fel, hogy az egyenletrendszer determinánsa $D \neq 0$, ekkor

$$A = \frac{D_A}{D}, \quad B = \frac{D_B}{D} \quad \text{és} \quad C = \frac{D_C}{D}.$$

A számlálókban szereplő determinánsok a D-ből úgy keletkeztek, hogy az indexben álló ismeretlen együtthatói helyére a jobb oldalon álló nullákat írtuk. Így mindegyik számlálóban álló determináns egyik oszlopa csupa nulla elemből áll, tehát értéke 0, vagyis $A = B = C = 0$. Mivel a Cramer-szabály az egyetlen megoldást szolgáltatja, ez azt jelenti, hogy ha a (8) *homogén lineáris egyenletrendszer determinánsa nem* 0*, az egyenletrendszer egyetlen megoldása a triviális megoldás.*

Ahhoz tehát, hogy a (8) egyenletrendszernek legyen a triviális megoldástól különböző megoldása, azaz legyen olyan egyenes, amely átmegy az adott pontokon, szükséges, hogy az egyenletrendszer determinánsa 0 legyen, vagyis

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{9}$$

legyen. Az adott pontok koordinátái között fennálló (9) összefüggés a két adott ponton áthaladó egyenes egyenlete. Ez az összefüggés egyrészt valóban egyenes egyenlete, mert ha a determinánst pl. az első sora szerint kifejtjük, látjuk, hogy elsőfokú kétismeretlenes egyenletet kapunk; másrészt a (9) egyenlettel adott egyenes valóban átmegy az adott két ponton, mert bármelyiknek két koordinátáját behelyettesítve az x, ill. y helyébe, a determináns két sora egyenlő lesz, így értéke valóban 0.

Érdemes megfigyelni, hogy a (9) bal oldalán álló determinánst utolsó oszlopa szerint kifejtve az

$$x_1y_2 - x_2y_1 - xy_2 + x_2y + x_1y_2 - x_2y = 0$$

egyenlethez jutunk, amelyből a két adott ponton áthaladó egyenes egyenletének másik, jólismert

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

alakja egyszerű átrendezéssel kapható meg.

Az előzőekben egy háromismeretlenes homogén lineáris egyenletrendszer nem triviális megoldásának meghatározásához kerestünk és találtunk szükséges feltételt. Ez n ismeretlen esetén pontosan ugyanúgy történhet, csak a végeredményt fogalmazzuk meg újra:

Ha egy n *egyenletből álló és* n *ismeretlent tartalmazó homogén egyenletrendszernek van a triviális megoldástól különböző megoldása, akkor az egyenletrendszer determinánsa szükségképpen* 0*.*

3. Az előző feladat gondolatmenetét követve könnyen beláthatjuk, hogy a $P_1(x_1; y_1)$, $P_2(x_2; y_2)$ és $P_3(x_3; y_3)$ pontok akkor és csak akkor sorakoznak egy egyenesen, ha

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{10}$$

Ha ez a determináns nem nulla, a három pont háromszöget határoz meg. Kérdés, a determináns értéke a háromszög milyen jellemző adatával kapcsolatos? Várható, hogy olyan adatával, amely 0 akkor, ha a háromszög egyenessé vagy pontttá fajul. (Ilyen adat pl. a háromszög magassága, területe, legkisebb szögének sinusa stb.)

Fejtsük ki a (10) determinánst első oszlopa szerint:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2).$$

A jobb oldalon a háromszög kétszeres területének ismert képlete áll, tehát

$$2t = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

4. Felvethetjük még azt a kérdést is, hogy mi a feltétele annak, hogy három egyenes egy ponton haladjon át.

Tegyük fel, hogy az

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1 &= 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 &= 0 \\ A_3x + B_3y + C_3 &= 0 \end{aligned}$$

egyenesek áthaladnak egy közös (ξ, η) ponton, azaz

$$\begin{aligned} A_1\xi + B_1\eta + C_1 &= 0 \\ A_2\xi + B_2\eta + C_2 &= 0 \\ A_3\xi + B_3\eta + C_3 &= 0 \end{aligned}$$

áll fenn. Ezt felfoghatjuk úgy is, hogy a ξ, η, 1 számhármas megoldása egy alkalmas homogén lineáris egyenletrendszernek, ti. az

$$\begin{aligned} A_1u + B_1v + C_1w &= 0 \\ A_2u + B_2v + C_2w &= 0 \\ A_3u + B_3v + C_3w &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszernek. Mivel $w = 1 \neq 0$, ez a megoldás nem triviális, tehát kell, hogy

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0$$

legyen. Ez tehát annak szükséges feltétele, hogy a három egyenes egy ponton haladjon át.

5. A két ponton áthaladó egyenes egyenletéhez hasonlóan adott pontokon áthaladó más görbék egyenletét is meghatározhatjuk, ezt a kör példáján mutatjuk meg.

A kör egyenletének általános alakja:

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0, \quad \text{ahol} \quad A \neq 0.$$

Keressük a $P_1(x_1; y_1)$, $P_2(x_2; y_2)$, $P_3(x_3; y3_)$ pontokon átmenő kör egyenletét, azaz olyan A, B, C, D együtthatókat, amelyekre

$$A(x_1^2+y_1^2)+Bx_1+Cy_1+D=0,$$
$$A(x_2^2+y_2^2)+Bx_2+Cy_2+D=0,$$
$$A(x_3^2+y_3^2)+Bx_3+Cy_3+D=0,$$

Ez a négy egyenlet homogén lineáris egyenletrendszer az A, B, C, D együtthatók meghatározására. Mivel $A \neq 0$, nem triviális megoldást kell keresnünk. Ilyen megoldás csak akkor van, ha A, B, C, D együtthatóiból képezett determináns

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{11}$$

$P(x;y)$ koordinátáinak ezt az összefüggést kell kielégíteniük, hogy a P pont a $P_1P_2P_3$ pontokon átmenő körön legyen, (11) tehát *a kör egyenlete*. Hogy valóban kört kapjunk, ahhoz x^2+y^2 együtthatójának nem szabad nullának lenni. Ha a determinánst pl. első sora szerint kifejtjük, akkor látjuk, hogy x^2+y^2 együtthatója az

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_2 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

determináns, amely éppen akkor nem nulla, amikor a három pont nem esik egy egyenesbe, azaz rajtuk keresztül kör fektethető.

Az eddigi példákban mindig csak azt használtuk fel, hogy ha a homogén lineáris egyenletrendszernek van a triviális megoldástól különböző megoldása, ekkor az együtthatókból alkotott determináns értéke 0 kell legyen. Hátra volna még megvizsgálni azt, hogy adott homogén lineáris egyenletrendszer nem triviális megoldását – ha van ilyen – hogyan számítjuk ki. Mivel ez azonban már meghaladná ennek a cikknek a kereteit, bizonyítás nélkül említjük meg a következő eredményt:

Ha a (6) egyenletrendszerben $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 0$, és az így nyert (6') homogén lineáris egyenletrendszer determinánsa $D = 0$, és a D legalább egy aldeterminánsa, pl. $A_{nn} \neq 0$, akkor a (6') egyenletrendszer megoldásai között a következő összefüggés áll fenn:

$$x_1 : x_2 : x_3 : \ldots := A_{n1} : A_{n2} : \ldots : A_{nn}.$$

Ezek szerint végtelen sok megoldás van, amelyekben az ismeretlenek aránya meghatározott.